মূল বইয়ের অতিরিক্ত অংশ

নবম অধ্যায়: সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

পরীক্ষায় কমন পেতে আরও প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ▶ ১ $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$ [ন.প্র.য.বো.]

ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^b = b^a$

দেখাতে হবে যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{(b^a)^{\frac{1}{b}}}$

$= \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{(a^b)^{\frac{1}{b}}}$ $[\because a^b = b^a]$

$= \dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a^1} = a^{\frac{a}{b}-1}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$

বামপক্ষ $= (b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p}$

$= (a+b)\log\frac{p}{q} + (b+c)\log\frac{q}{r} + (c+a)\log\frac{r}{p}$

$= (a+b)\log\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (b+c)\log\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (c+a)\log\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (a+b)\log\frac{y^{a-1}}{y^{b-1}} + (b+c)\log\frac{y^{b-1}}{y^{c-1}} + (c+a)\log\frac{y^{c-1}}{y^{a-1}}$

$= (a+b)\log y^{a-1-b+1} + (b+c)\log y^{b-1-c+1} + (c+a)\log y^{c-1-a+1}$

$= (a+b)\log y^{a-b} + (b+c)\log y^{b-c} + (c+a)\log y^{c-a}$

$= (a+b)(a-b)\log y + (b+c)(b-c)\log y + (c+a)(c-a)\log y$

$= (a^2-b^2)\log y + (b^2-c^2)\log y + (c^2-a^2)\log y$

$= (a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2)\log y$

$= 0 \times \log y$

$= 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore (b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

$(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $= (b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$

$= (b-c)\log(xy^{a-1}) + (c-a)\log(xy^{b-1}) + (a-b)\log(xy^{c-1})$

$= (b-c)(\log x + \log y^{a-1}) + (c-a)(\log x + \log y^{b-1}) + (a-b)(\log x + \log y^{c-1})$

$= (b-c)\log x + (b-c)\log y^{a-1} + (c-a)\log x + (c-a)\log y^{b-1} + (a-b)\log x + (a-b)\log y^{c-1}$

$= (b-c)\log x + (b-c)(a-1)\log y + (c-a)\log x + (c-a)(b-1)\log y + (a-1)\log x + (a-b)(c-1)\log y$

$= (b-c+c-a+a-b)\log x + \{(b-c)(a-1) + (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\}\log y$

$= 0 \times \log x + \{(b-c)(a-1) + (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\log y$

$= 0 + \{(ab-ca-b+c) + (bc-ab-c+a) + (ca-bc-a+b)\}\log y$

$= (ab-ca-b+c+bc-ab-c+a+ca-bc-a+b)\log y$

$= 0 \times \log y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

প্রশ্ন ▶ ২ $f(x) = 3^x$

ক. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং এর বৈশিষ্ট্য লিখ। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 3^x$

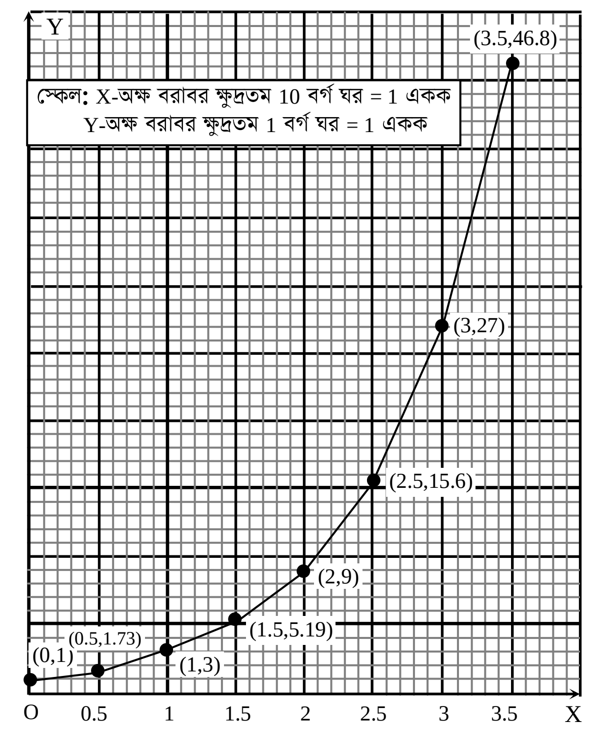
$\therefore$ ডোম $f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $f = (0, \infty)$ **(Ans.)**

খ ধরি, $y = f(x) = 3^x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

$y = f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায় যা নিম্নে দেখানো হলো:



বৈশিষ্ট্য:

i. লেখচিত্রটি (0, 1) বিন্দুগামী।

ii. x এর যে কোনো মানের জন্য $f(x)$ ধনাত্মক।

iii. লেখচিত্রটি ক্রমবর্ধমান।

iv. লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

গ দেওয়া আছে,

$f(x) = 3^x$

মনে করি, $f^{-1}(x) = a$

বা, $x = f(a)$

বা, $x = 3^a$

বা, $\log_3 x = a$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_3 x$ **(Ans.)**

মনে করি, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_3 x_1 = \log_3 x_2$

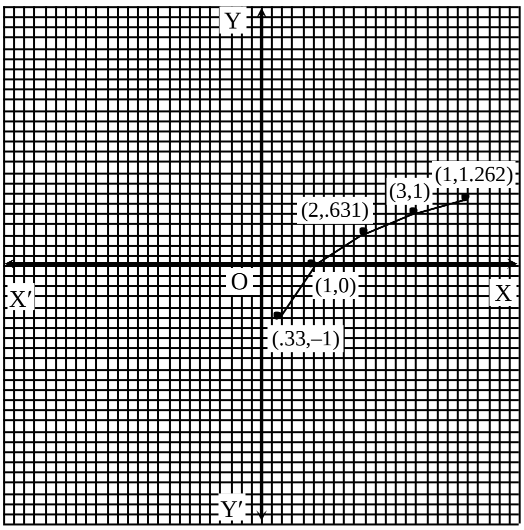
$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং বিপরীত ফাংশনটি এক-এক।

x এর কয়েকটি মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় করি:

x	$\frac{1}{3}$	1	2	3	4
y	–1	0	0.631	1	1.262

$f^{-1}(x) = \log_3 x$ এর লেখ পাওয়া যায় যা নিম্নে দেখানো হলো:



প্রশ্ন ▶৩ $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ এবং $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণের সমাধান কর। ২

খ. f^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$

বা, $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{10}{3}$ বা, $(\sqrt{8})^{\frac{10}{3}} = x$ বা, $(\sqrt{2^3})^{\frac{10}{3}} = x$

বা, $x = 2^{\frac{3}{2} \times \frac{10}{3}}$ বা, $x = 2^5$ $\therefore x = 32$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$

ধরি, $y = f(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$ $\therefore y = ln\frac{1-x}{1+x}$

বা, $e^y = \frac{1-x}{1+x}$

বা, $1 - x = (1 + x)e^y$

বা, $1 - x = e^y + xe^y$

বা, $1 - e^y = x(1 + e^y)$

বা, $x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ **(Ans.)**

গ যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\frac{1-x}{1+x} > 0$ যদি (i) $1 - x > 0$ এবং $1 + x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $1 - x < 0$ এবং $1 + x < 0$ হয়।

(i) $-x > -1$ এবং $x > -1$

$\therefore x < 1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : -1 < x\} \cap \{x : x < 1\}$

$= (-1, \infty) \cap (-\infty, 1) = (-1, 1)$

(ii) $-x < -1$ এবং $x < -1$

$\therefore x > 1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-1, 1) \cup \varnothing = (-1, 1)$

'খ' থেকে প্রাপ্ত, $x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

ডোমেন $D_f = (-1, 1)$ **(Ans.)**

রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪ $\mathbf{x^{a+b} = p, x^{b+c} = q, x^{c+a} = r}$

ক. $p \times q \times r = 1$ হলে, দেখাও যে, $a + b + c$ এর মান 0 ২

খ. $\frac{p}{x^{2c}} \times \frac{q}{x^{2a}} \times \frac{r}{x^{2b}}$ এর মান কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\left\{\frac{p^{a+b}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{q^{b+c}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{r^{c-a}}{x^{ca}}\right\}^{c-a} = 1$ ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$x^{a+b} = p, x^{b+c} = q, x^{c+a} = r$

এখন, $p \times q \times r = 1$

বা, $x^{a+b} \times x^{b+c} \times x^{c+a} = 1$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^{a+b+b+c+c+a} = 1$

বা, $x^{2(a+b+c)} = x^0$ [$\because x^0 = 1$]

বা, $2(a + b + c) = 0$

বা, $a + b + c = 0$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $a + b + c = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ প্রদত্ত রাশি, $\frac{p}{x^{2c}} \times \frac{q}{x^{2a}} \times \frac{r}{x^{2b}}$

$= \frac{x^{a+b}}{x^{2c}} \times \frac{x^{b+c}}{x^{2a}} \times \frac{x^{c+a}}{x^{2b}}$ [মান বসিয়ে]

$= x^{a+b-2c} \times x^{b+c-2a} \times x^{c+a-2b}$

$= x^{a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b}$

$= x^{2a-2a+2b-2b+2c-2c}$

$= x^0$

$= 1$ **(Ans.)**

গ প্রমাণ করতে হবে,

$$\left\{\frac{p^{a+b}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{q^{b+c}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{r^{c+a}}{x^{ca}}\right\}^{c-a} = 1$$

বামপক্ষ $= \left\{\frac{p^{a+b}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{q^{b+c}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{r^{c-a}}{x^{ca}}\right\}^{c-a}$

$= \left\{\frac{(x^{a+b})^{a+b}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{(x^{b+c})^{b+c}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{(x^{c+a})^{c+a}}{x^{ca}}\right\}^{c-a}$

[p, q, r এর মান বসিয়ে]

$= \left\{\frac{(x^{(a+b)^2})}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{(x^{(b+c)^2})}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{(x^{(c+a)^2})}{x^{ca}}\right\}^{c-a}$

$= \{x^{a^2+2ab+b^2-ab}\}^{a-b} \times \{x^{b^2+2bc+c^2-bc}\}^{b-c} \times \{x^{c^2+2ca+a^2-ca}\}^{c-a}$

$= (x^{a^2+ab+b^2})^{a-b} \times (x^{b^2+bc+c^2})^{b-c} \times (x^{c^2+ca+a^2})^{c-a}$

$= x^{a^3-b^3} \times x^{b^3-c^3} \times x^{c^3-a^3}$

$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= x^0$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left\{\frac{p^{a+b}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \times \left\{\frac{q^{b+c}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \times \left\{\frac{r^{c+a}}{x^{ca}}\right\}^{c-a} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫ $\mathbf{p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}}$ [ন.প্র.য.বো.]

ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^b = b^a$

দেখাতে হবে যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(b^a)^{\frac{1}{b}}}$

$= \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(a^b)^{\frac{1}{b}}}$ [$\because a^b = b^a$]

$= \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a^1} = a^{\frac{a}{b}-1}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$

বামপক্ষ $= (b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p}$

$= (a+b)\log\frac{p}{q} + (b+c)\log\frac{q}{r} + (c+a)\log\frac{r}{p}$

$= (a+b)\log\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (b+c)\log\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (c+a)\log\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (a+b)\log\frac{y^{a-1}}{y^{b-1}} + (b+c)\log\frac{y^{b-1}}{y^{c-1}} + (c+a)\log\frac{y^{c-1}}{y^{a-1}}$

$= (a+b)\log y^{a-1-b+1} + (b+c)\log y^{b-1-c+1} + (c+a)\log y^{c-1-a+1}$

$= (a+b)\log y^{a-b} + (b+c)\log y^{b-c} + (c+a)\log y^{c-a}$

$= (a+b)(a-b)\log y + (b+c)(b-c)\log y + (c+a)(c-a)\log y$

$= (a^2-b^2)\log y + (b^2-c^2)\log y + (c^2-a^2)\log y$

$= (a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2)\log y$

$= 0 \times \log y$

$= 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore (b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

$(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $= (b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$

$= (b-c)\log(xy^{a-1}) + (c-a)\log(xy^{b-1}) + (a-b)\log(xy^{c-1})$

$= (b-c)(\log x + \log y^{a-1}) + (c-a)(\log x + \log y^{b-1}) + (a-b)(\log x + \log y^{c-1})$

$= (b-c)\log x + (b-c)\log y^{a-1} + (c-a)\log x + (c-a)\log y^{b-1} + (a-b)\log x + (a-b)\log y^{c-1}$

$= (b-c)\log x + (b-c)(a-1)\log y + (c-a)\log x + (c-a)(b-1)\log y + (a-1)\log x + (a-b)(c-1)\log y$

$= (b-c+c-a+a-b)\log x + \{(b-c)(a-1) + (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\}\log y$

$= 0 \times \log x + \{(b-c)(a-1) + (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\log y$

$= 0 + \{(ab-ca-b+c) + (bc-ab-c+a) + (ca-bc-a+b)\}\log y$

$= (ab-ca-b+c+bc-ab-c+a+ca-bc-a+b)\log y$

$= 0 \times \log y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

প্রশ্ন ▶৬ $\mathbf{f(x) = \ln(x-4)}$ **হলে,**

ক. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্য লেখ। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(x-4)$

মনে করি, $f^{-1}(x) = a$

বা, $x = f(a)$

বা, $x = \ell n(a-4)$

বা, $e^x = a - 4$

বা, $a = e^x + 4$

$\therefore f^{-1}(x) = e^x + 4.$

খ যেহেতু লগারিদমিক শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x - 4 > 0$

বা, $x > 4$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (4, \infty)$

আবার 'ক' হতে পাই, $x = e^y + 4$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

গ লেখচিত্র: $y = f(x) = ln(x - 4)$

যেহেতু ফাংশনটির ডোমেন $(4, \infty)$, সুতরাং ডোমেনের মধ্যে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে)।

$x = 5$ হলে, $y = \ln(5 - 4) = \ln 1 = 0$

$x = 4.5$ হলে $y = \ln(0.5) = -0.693$

$x = 6$ হলে $y = \ln 2 = 0.693$

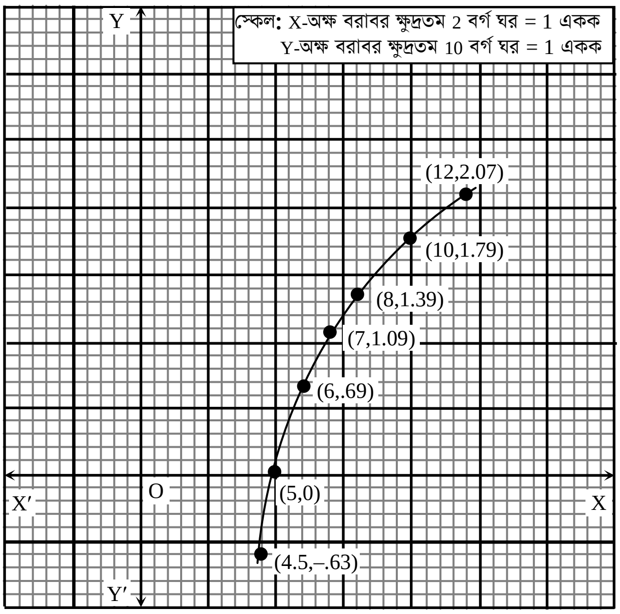
$x = 7$ হলে $y = \ln(7 - 4) = 1.09$

$x = 8$ হলে $y = \ln(8 - 4) = 1.39$

$x = 10$ হলে $y = \ln(10 - 4) = 1.79$

$x = 12$ হলে $y = \ln(12 - 4) = 2.07$

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজে স্থাপন করে সংযোগ করলে $f(x)$ এর লেখচিত্র আঁকলে তা নিম্নরূপ:



লেখচিত্রটির ধর্ম :

1. x-এর সকল মান 4 থেকে বড়।
2. $x = 5$ এর জন্য $y = \ln(5 - 4) = \ln 1 = 0$ অর্থাৎ রেখাটি x-অক্ষকে $(5, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
3. $x > 5$ হলে x-এর সকল মানের জন্য y ধনাত্মক।
4. $4 < x < 5$ হলে y ঋণাত্মক।
5. $x \to 4$ হলে y এর মান ক্রমাগত ঋণাত্মক অসীমের দিকে অগ্রসর হয় অর্থাৎ $y \to -\infty$

প্রশ্ন ▶ ৭ $p^2 + q^2 = 9pq$

ক. দেখাও যে, $\log(p^2 + q^2) = 2\log3 + \log p + \log q$ ২

খ. দেখাও যে, $\log(p^4 + q^4) = \log 79 + 2(\log p + \log q)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2\log(p - q) = \log7 + \log p + \log q$ ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$p^2 + q^2 = 9pq$

সমীকরণের উভয় পার্শ্বে log নিয়ে পাই,

$\log(p^2 + q^2) = \log9pq$

$= \log9 + \log p + \log q$

$= \log3^2 + \log p + \log q$

$\therefore \log(p^2 + q^2) = 2\log3 + \log p + \log q$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $(p^2 + q^2)^2 = (9pq)^2$ [বর্গ করে]

বা, $p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = 81p^2q^2$

বা, $p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = 81p^2q^2$

বা, $p^4 + q^4 = 79p^2q^2$

বা, $\log(p^4 + q^4) = \log(79\, p^2q^2)$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

$= \log 79 + \log(pq)^2$

$= \log79 + 2\log(pq)$

$\therefore \log(p^4 + q^4) = \log79 + 2(\log p + \log q)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $p^2 - 2pq + q^2 = 9pq - 2pq$

বা, $(p - q)^2 = 7pq$

বা, $\log(p - q)^2 = \log7pq$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

বা, $2\log(p - q) = \log7 + \log pq$

$\therefore 2\log(p - q) = \log7 + \log p + \log q$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $p = y^a, q = y^b, r = y^c$ এবং $A = \log_x(yz)$, $B = \log_y(zx)$, $C = \log_z(xy)$

ক. $a^2 + b^2 = 7ab$ হলে দেখাও যে, $\log_k\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log_k(ab)$ ২

খ. $a + b + c = 0$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{q + r^{-1} + 1} + \frac{1}{r + p^{-1} + 1} + \frac{1}{p + q^{-1} + 1} = 1$$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{A + 1} + \frac{1}{B + 1} + \frac{1}{C + 1} = 1$ ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $(a + b)^2 - 2ab = 7ab$ বা, $(a + b)^2 = 9ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $2\log_k\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log_k(ab)$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore \log_k\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log_k(ab)$ **(দেখানো হলো)**

খ $\frac{1}{1+p+q^{-1}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}$

$=\frac{1}{1+y^a+y^{-b}}+\frac{1}{1+y^b+y^{-c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{-a}}$

$=\frac{1}{y^b+y^{-c}+1}+\frac{1}{y^c+y^{-a}+1}+\frac{1}{y^a+y^{-b}+1}$

$=\frac{1}{y^b+\frac{1}{y^c}+1}+\frac{1}{y^c+y^{-a}+1}+\frac{1}{y^a+y^{-b}+1}$

$=\frac{y^c}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{y^a+\frac{1}{y^b}+1}$

[$\because a+b+c=0 \therefore b+c=-a$]

$=\frac{y^c}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{y^b}{y^{a+b}+y^b+1}$

$=\frac{y^c}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{y^b}{y^{-c}+y^b+1}$

$=\frac{y^c}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{y^b}{\frac{1}{y^c}+y^b+1}$

$=\frac{y^c}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{1}{1+y^c+y^{b+c}}+\frac{y^b.y^c}{1+y^c+y^{b+c}}$

$=\frac{y^c+1+y^{b+c}}{1+y^c+y^{b+c}}=\frac{1+y^c+y^{b+c}}{1+y^c+y^{b+c}}=1$

$\therefore \frac{1}{1+p+q^{-1}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}=1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A=\log_x(yz)$, $B=\log_y(zx)$, $c=\log_z(xy)$

$\therefore 1+A=1+\log_x(yz)=\log_x x+\log_x(yz)=\log_x(xyz)$

$1+B=1+\log_y(zx)=\log_y y+\log_y(zx)=\log_y(xyz)$

এবং $1+C=1+\log_z(xy)=\log_z z+\log_z(xy)=\log_z(xyz)$

বামপক্ষ, $\frac{1}{A+1}+\frac{1}{B+1}+\frac{1}{C+1}$

$=\frac{1}{\log_x(xyz)}+\frac{1}{\log_y(xyz)}+\frac{1}{\log_z(xyz)}$

ধরি, $\log_x(xyz)=a \Rightarrow xyz=x^a \therefore x=(xyz)^{1/a}$

$\log_y(xyz)=b \Rightarrow xyz=y^b \therefore y=(xyz)^{1/b}$

$\log_z(xyz)=c \Rightarrow xyz=z^c \therefore z=(xyz)^{1/c}$

$\therefore (xyz)^1=(xyz)^{1/a}.(xyz)^{1/b}.(xyz)^{1/c}=(xyz)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ অর্থাৎ, $\frac{1}{A+1}+\frac{1}{B+1}+\frac{1}{C+1}=1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=m$

ক. দেখাও, $\log_k a^{y+z}=m(y^2-z^2)$ এবং $\log_k a^{y^2+yz+z^2}=m(y^3-z^3)$ ২

খ. দেখাও যে, $a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y}=1$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}=a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y}$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=m$

$\therefore \frac{\log_k a}{y-z}=m$

বা, $\log_k a=m(y-z)$

বা, $(y+z)\log_k a=m(y+z)(y-z)$ [উভয় পক্ষে $(y+z)$ গুণ করে]

$\therefore \log_k a^{y+z}=m(y^2-z^2)$

আবার, $\log_k a=m(y-z)$

বা, $(y^2+yz+z^2)\log_k a=m(y-z)(y^2+yz+z^2)$

[উভয় পক্ষে y^2+yz+z^2 গুণ করে]

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2}=m(y^3-z^3)$

$\therefore \log_k a^{y+z}=m(y^2-z^2)$ এবং $\log_k a^{y^2+yz+z^2}=m(y^3-z^3)$

(দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k b}{z-x}=m$

বা, $\log_k b=m(z-x)$

বা, $(z+x)\log_k b=m(z-x)(z+x)$

বা, $\log_k b^{z+x}=m(z^2-x^2)$ .... (i)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y}=m$

বা, $\log_k c=m(x-y)$

বা, $(x+y)\log_k c=m(x-y)(x+y)$

$\therefore \log_k c^{x+y}=m(x^2-y^2)$ .... (ii)

'ক' থেকে পাই $\log_k a^{y+z}=m(y^2-z^2)$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y+z}+\log_k b^{z+x}+\log_k c^{x+y}=m(y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2)$

বা, $\log_k a^{y+z}\cdot b^{z+x}\cdot c^{x+y}=m.0=0$

বা, $\log_k a^{y+z}\cdot b^{z+x}c^{x+y}=\log_k 1$

$\therefore a^{y+z}.b^{z+x}c^{x+y}=1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k b}{z-x}=m$

বা, $\log_k b=m(z-x)$

বা, $(z^2+zx+x^2)\log_k b=m(z-x)(z^2+zx+x^2)$

[উভয় পক্ষে z^2+zx+x^2 গুণ করে]

বা, $\log_k b^{z^2+zx+x^2}=m(z^3-x^3)$ .... (iv)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y}=m$

বা, $\log_k c=m(x-y)$

বা, $(x^2+xy+y^2)\log_k c=m(x-y)(x^2+xy+y^2)$

[উভয় পক্ষে x^2+xy+y^2 গুণ করে]

বা, $\log_k c^{x^2+xy+y^2}=m(x^3-y^3)$ .... (v)

'ক' হতে পাই, $\log_k a^{y^2+yz+z^2}=m(y^3-z^3)$ ....(vi)

(iv), (v) ও (vi) সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2}+\log_k b^{z^2+zx+x^2}+\log_k c^{x^2+xy+y^2}$

$=m(y^3-z^3+z^3-x^3+x^3-y^3)=0$

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2}b^{z^2+zx+x^2}c^{x^2+xy+y^2}=\log_k 1$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2}b^{z^2+zx+x^2}c^{x^2+xy+y^2}=1$

'খ' হতে পাই,

$a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2}b^{z^2+zx+x^2}c^{x^2+xy+y^2}=a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১০ $p=\frac{x^a}{x^b}$, $q=\frac{x^b}{x^c}$ এবং $r=\frac{x^c}{x^a}$।

ক. pq^{-1} নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $p^{a+b-c}.q^{b+c-a}.r^{c+a-b}=1.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(a+b)\log_k p+(b+c)\log_k q+(c+a)\log_k r=0$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = \frac{x^a}{x^b}$, $q = \frac{x^b}{x^c}$, $r = \frac{x^c}{x^a}$

$pq^{-1} = \frac{x^a}{x^b}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{-1}$ [p ও q এর মান বসিয়ে]

$= \frac{x^a}{x^b} \cdot \frac{x^c}{x^b}$

$= \frac{x^{a+c}}{x^{b+b}}$

$\therefore pq^{-1} = x^{a+c-2b}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = \frac{x^a}{x^b}$ $\therefore p = x^{a-b}$

$q = \frac{x^b}{x^c}$ $\therefore q = x^{b-c}$

এবং $r = \frac{x^c}{x^a}$ $\therefore r = x^{c-a}$

বামপক্ষ $= p^{a+b-c}\ q^{b+c-a}\ r^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c}(x^{b-c})^{b+c-a}(x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{(a-b)(a+b-c)} . x^{(b-c)(b+c-a)} . x^{(c-a)(c+a-b)}$

$= x^{a^2-ab+ab-b^2-ac+bc} . x^{b^2-bc+bc-c^2-ab+ac} . x^{c^2-ac+ac-a^2-bc+ab}$

$= x^{a^2-b^2-ac+bc} . x^{b^2-c^2-ab+ac} . x^{c^2-a^2-bc+ab}$

$= x^{a^2-b^2-ac+bc+b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ab}$

$= x^0$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore p^{a+b-c} . q^{b+c-a} . r^{c+a-b} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$p = \frac{x^a}{x^b}$

বা, $p = x^{a-b}$

বা, $\log_k p = \log_k x^{a-b}$ [উভয় দিকে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore \log_k p = (a-b)\log_k x$ ... ... (i)

$q = \frac{x^b}{x^c}$

বা, $q = x^{b-c}$

বা, $\log_k q = \log_k x^{b-c}$

$\therefore \log_k q = (b-c)\log_k x$ ... ... (ii)

এবং $r = \frac{x^c}{x^a}$

বা, $r = x^{c-a}$

বা, $\log_k r = \log_k x^{c-a}$

$\therefore \log_k r = (c-a)\log_k x$ ... ... (iii)

এখন বামপক্ষ $= (a+b)\log_k p + (b+c)\log_k q + (c+a)\log_k r$

$= (a+b)(a-b)\log_k x + (b+c)(b-c)\log_k x + (c+a)(c-a)\log_k x$

$= (a^2-b^2)\log_k x + (b^2-c^2)\log_k x + (c^2-a^2)\log_k x$

$= (a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2)\log_k x$

$= 0 \times \log_k x$

$= 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore (a+b)\log_k p + (b+c)\log_k q + (c+a)\log_k r = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১১ একটি ফাংশন $y = 1 - 2^{-x}$

ক. প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন কর এবং বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে তা এক-এক কিনা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^{-x}$ ... ... (i)

ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $= \mathbb{R}$ **(Ans.)**

(i) নং থেকে পাই, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $\frac{1}{2^x} = 1 - y$ বা, $2^x = \frac{1}{1-y}$ বা, $\log 2^x = \log\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $x \log 2 = \log\left(\frac{1}{1-y}\right)$ বা, $x = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1}{1-y}\right)$ ... ... (ii)

(ii) নং সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $1 - y > 0$ $\therefore y < 1$

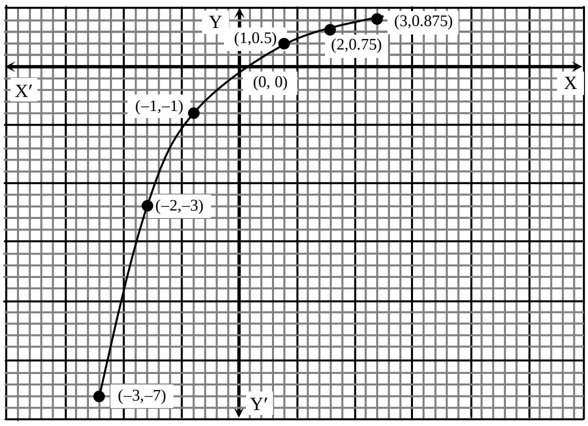
$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $= (-\infty, 1)$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^{-x}$ $\therefore y = 1 - \frac{1}{2^x}$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণটি $-\infty < x < \infty$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। সুতরাং এই ব্যবধির মধ্যে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–7	–3	–1	0	0.5	0.75	0.875

ক্ষুদ্রতম বর্গের 4 বাহু সমান এক একক ধরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো যোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র পাই।



বৈশিষ্ট্য: (i) লেখচিত্রটি পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে, এটি মূলবিন্দুগামী।

(ii) x এর ধনাত্মক মানের জন্য y ধনাত্মক এবং x এর ঋণাত্মক মানের জন্য y ঋণাত্মক।

(iii) $x \to -\infty$ এর জন্য $y \to -\infty$ এবং $x \to \infty$ এর জন্য $y \to 1$।

(iv) লেখচিত্রটি অবচ্ছিন্ন।

গ ধরি, $y = f(x) = 1 - 2^{-x}$

$\therefore y = 1 - 2^{-x}$ এবং $y = f(x)$ $\therefore f^{-1}(y) = x$

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $\frac{1}{2^x} = 1 - y$

বা, $2^x = \frac{1}{1-y}$

বা, $\log 2^x = \log\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $x \log 2 = \log\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $x\log 2 = \log(1-y)^{-1}$

বা, $x\log 2 = -\log(1-y)$

$\therefore x = \frac{-\log(1-y)}{\log 2}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{-\log(1-y)}{\log 2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-\log(1-x)}{\log 2}$

মনে করি,

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\frac{-\log(1-x_1)}{\log 2} = \frac{-\log(1-x_2)}{\log 2}$

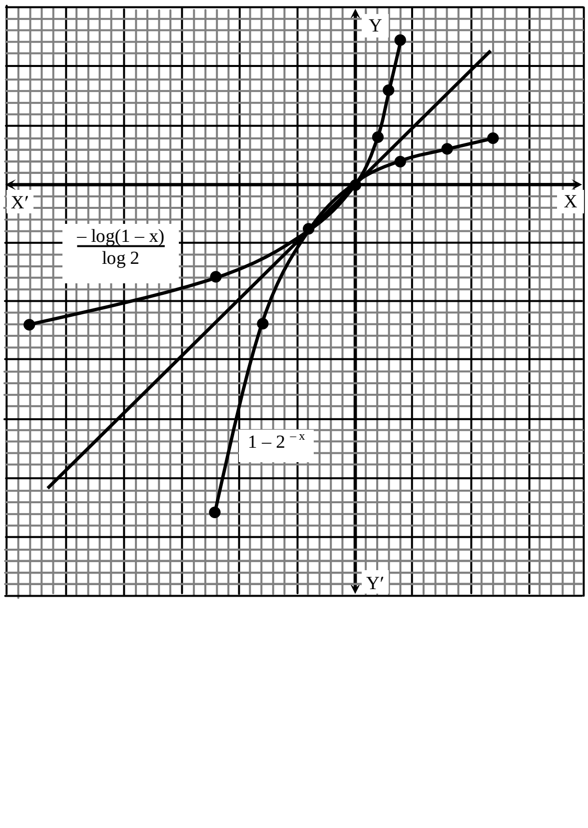
বা, $1 - x_1 = 1 - x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনটি এক-এক

$f^{-1}(x) = \frac{-\log(1-x)}{\log 2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন:

যেহেতু $\frac{-\log(1-x)}{\log 2}$ হলো $1 - 2^{-x}$ এর বিপরীত। সুতরাং $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ। যখন $x \to -\infty$ তখন $y \to -\infty$ এবং যখন $x \to 1$ তখন $y \to \infty$



উত্তর সংকেতসহ সৃজনশীল প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১২ **$f(x) = -5^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$ হলে,** ◀ *শিখনফল-৩ ও ৪*

ক. দেখাও যে, $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$ যখন $a, b \in \mathbb{N}, a < b$ ২

খ. $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশনকে $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. লেখচিত্রের মাধ্যমে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: খ. $f^{-1}(x) = -\frac{\log(1-x)}{\log 5}$ **গ.** রেঞ্জ, $R_f = (-\infty, 1)$

প্রশ্ন ▶ ১৩ **দেওয়া আছে, $y = f(x)$, যেখানে $f(x)$, x এর 10 ভিত্তিক লগারিদম।**

ক. $f(x)$ = কত এবং এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর লেখচিত্র আঁক এবং লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য লেখ। ৪

উত্তর: ক. $\log_{10}x, 10^x$ **খ.** ডোমেন $= (0, \infty)$, রেঞ্জ $= \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

প্রশ্ন ▶ ১৪ $\frac{\log_e(1+x)}{\log_e x} = 2$ একটি লগারিদমিক সমীকরণ।

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলক সংবলিত একটি বীজগাণিতিক দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপে প্রকাশ কর। ২

খ. ক. হতে প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। ৪

গ. যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5x}b^{3x}$ হয় তবে দেখাও যে, $x \log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e a$ ৪

উত্তর: ক. $x^2 - x - 1 = 0$; **খ.** মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান (1.618, – 0.618)

প্রশ্ন ▶ ১৫ i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $5^x + 5^{2-x} = 26$

iii. $\frac{\log_k(3+x)}{(\log_k x)} = 2$

ক. (i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক বের কর। ২

খ. (ii) নং সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

গ. (iii) নং সমীকরণ দ্বারা প্রমাণ কর যে, $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ৪

উত্তর: ক. 1; **খ.** $x = 0, 2$

প্রশ্ন ▶ ১৬ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}, b > 0$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

প্রশ্ন ▶ ১৭ $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}, \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}, \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}, \left\{\frac{p^{(x+z)^2}}{p^{xz}}\right\}^{y-z}$ ও $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x}$

ক. ১ম ও ৪র্থ রাশির মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \times \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \times \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = 1.$ ৪

উত্তর: ক. $P^{a^3-b^3}, P^{x^3-y^3}$; **খ.** 1

প্রশ্ন ▶ ১৮ **$f(x) = -5^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$ হলে,** ◀ *শিখনফল-৩ ও ৪*

ক. দেখাও যে, $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$ যখন $a, b \in \mathbb{N}, a < b$ ২

খ. $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশনকে $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. লেখচিত্রের মাধ্যমে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: খ. $f^{-1}(x) = -\frac{\log(1-x)}{\log 5}$ **গ.** রেঞ্জ, $R_f = (-\infty, 1)$

প্রশ্ন ▶ ১৯ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয়, তাহলে

ক. $p + q + r = 3$ হলে দেখাও যে, $\sqrt[3]{abc} = x$ ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r-1}.b^{r-p-1}.c^{p-q-1} = x^{-3}$. ৪

গ. $p + q + r = 3, pq + qr + rp = 3$ হলে $(a^{-2}b^{-2}c^{-2})/(a^{p+1}b^{q+1}c^{r+1})$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: গ. x^{-12}

প্রশ্ন ▶ ২০ **১ম রাশি $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$, ২য় রাশি $x = 1 + \log_a bc, y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$.**

ক. ১ম রাশির ক্ষেত্রে দেখাও যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$ ২

খ. ২য় রাশির পদগুলোর ক্ষেত্রে, প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$। ৪

গ. যদি $2\log_8 A = p, 2\log_2 2A = q$ এবং $q - p = 4$ হয় তবে A এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: গ. $A = 2^{\frac{3}{2}}$

প্রশ্ন ▶ ২১ **$\frac{\log_k a}{4} = \frac{\log_k b}{6} = \frac{\log_k c}{3p}$ এবং $a^3b^2c = 1$**

ক. ১ম শর্ত হতে দেখাও যে, $b^2 = a^3$ ২

খ. ১ম ও ২য় শর্ত হতে p-এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k ab + \log_k bc + \log_k ca - \log_k ab^{-2}c = \log_k a$ ৪

উত্তর: খ. -8

প্রশ্ন ▶ ২২ **যদি $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$ এবং $9^{2R} = 3^{R+1}$ হলে,**

ক. R এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 2$ এবং $y = 3$ হয় তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে দেখাও যে,
$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ এবং $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = (3xyz)^{-1}$ ৪

উত্তর: ক. $\frac{1}{3}$

প্রশ্ন ▶ ২৩ $p = x^a, q = x^b, r = x^c$ এবং $a + b + c = 0$.

ক. $(pqr)^2$ এর মান বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(\frac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = 1.$ ৪

উত্তর: ক. 1

প্রশ্ন ▶ ২৪ $A = \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$B = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $a \geq 0$.

$P = \log_a(bc), q = \log_b(ca), r = \log_c(ab)$ হলে,

ক. দেখাও যে, $A = 1$. ২

খ. $B = 0$ হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1.$ ৪

নিজেকে যাচাই করি

সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সময়: ২৫ মিনিট; মান-২৫

১. যদি $a^b = b^a$ হয় তবে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}$ এর মান কোনটি?

(ক) $a^{\frac{a}{b}}$ (খ) $a^{\frac{a}{b}-1}$

(গ) $a^{\frac{a}{b}+1}$ (ঘ) $a^{\frac{b}{a}-1}$

২. $3^{3x} = \frac{1}{3}$ হলে, x এর মান কত?

(ক) -3 (খ) $\frac{-1}{3}$

(গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) 3

৩. 400 এর—

i. মান $(2\sqrt{5})^4$ এর সমান

ii. 4 ভিত্তিক লগ $2\sqrt{5}$

iii. $2\sqrt{5}$ ভিত্তিক লগ 4

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৪. $\sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}}$ এর মান কত?

(ক) a (খ) a^{12}

(গ) 1 (ঘ) 0

৫. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ ....অসীম পর্যন্ত মান কত?

(ক) x^3 (খ) $x^{\frac{1}{2}}$

(গ) x (ঘ) x^2

৬. $\frac{1}{a^x} = \frac{1}{b^y} = \frac{1}{c^z}$ এবং $abc = 1$ হলে $x + y + z =$ কত?

(ক) -1 (খ) 0

(গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) 1

৭. $a^{p^2-q^2}.a^{q^2-r^2}.a^{r^2-p^2} = ?$

(ক) 0 (খ) 1

(গ) pqr (ঘ) $p^2q^2r^2$

৮. $y = 2^{-x}$ ফাংশনটি?

i. সূচক ফাংশন

ii. ডোমেন $(-\infty, \infty)$

iii. রেঞ্জ $(0, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে (৯-১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3^{2x+1} - 4.3^{x+1} + 9 = 0$ একটি সূচক সমীকরণ।

৯. $3^x = a$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণটির a এর মান কত?

(ক) $-3, -9$ (খ) $1, 3$

(গ) $-\frac{1}{3}, 9$ (ঘ) $3, \frac{1}{9}$

১০. সমীকরণটির সমাধান কত?

(ক) $0, 1$ (খ) $0, -1$

(গ) $1, 2$ (ঘ) $\frac{1}{2}, 1$

১১. যদি $x, y, z \neq 0$, $p^x = q^y = r^z$ হয় তবে—

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $q = r^{\frac{z}{y}}$ (খ) $r = q^{\frac{z}{y}}$

(গ) $q = r^{\frac{y}{z}}$ (ঘ) $p = q^{\frac{x}{y}}$

১২. $x, y, z \neq 0$, $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x}$ (খ) $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2}{z}$

(গ) $\frac{2}{x+y} = \frac{1}{z}$ (ঘ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

১৩. $a > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ হলে—

i. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

ii. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

iii. $\sqrt[m]{a^m} = a$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

$f(x) = \frac{x}{|x|}$ একটি ফাংশন এবং $x \in \mathbb{R}$.

উপরের তথ্যের আলোকে ১৪ ও ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১৪. $f(0)$ কত?

(ক) 0 (খ) 1

(গ) অসংজ্ঞায়িত (ঘ) ∞

১৫. $f(x)$ এর ডোমেন কত?

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) φ

(গ) $\mathbb{R} - \{1\}$ (ঘ) $\mathbb{R} - \{0\}$

১৬. $f(x) = \frac{x}{|x|}$, ফাংশনের রেঞ্জ কত যেখানে $x \neq 0$?

(ক) $R_f = \{1\}$ (খ) $R_f = \{-1\}$

(গ) $R_f = \{-1, 1\}$ (ঘ) $R_f = \{x : x \in \mathbb{R}\}$

১৭. $f(x) = e^{\frac{|x|}{2}}$ ফাংশনটির রেঞ্জ কোনটি, যেখানে, $-1 < x < 0$?

(ক) $(-1, 0)$ (খ) $(1, 0)$

(গ) $(1, \sqrt{e})$ (ঘ) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$

১৮. x এর কোন কোন মানের জন্য $\log_{10}[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$ হবে?

(ক) 2, 4 (খ) 2, 6

(গ) 4, 6 (ঘ) 4, 8

১৯. $y = \ln\frac{5+x}{5-x}$ এর রেঞ্জ—

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) $(-5, 5)$

(গ) $\mathbb{R}_+$ (ঘ) $\mathbb{R}_+ - \{5\}$

২০. $\log_2 \log_2 \log_3 81 =$ কত?

(ক) 1 (খ) 2

(গ) 3 (ঘ) 4

২১. log3.2 এর মান কোনটি?

(ক) log2 – log3 + log5

(খ) 2 log5 – log2

(গ) 4 log2 – log5

(ঘ) log32 – log5

২২. $F(y) = |y| + y$ এর ডোমেন কত?

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) $\mathbb{R}_+$

(গ) $\{-4, 5]$ (ঘ) $]-4, 5[$

নিচের তথ্যের আলোকে ২৩ ও ২৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$

২৩. $\frac{b}{c}$ এর মান কত?

(ক) x^{p-q} (খ) x^{q-r}

(গ) y^{p+q} (ঘ) y^{q-r}

২৪. a + b + c এর মান নিচের কোনটি?

(ক) $\frac{x}{y}(y^p + y^q + y^r)$ (খ) $\frac{x}{y}(y^p - y^q - y^r)$

(গ) $\frac{y}{x}(y^p + y^q + y^r)$ (ঘ) $\frac{y}{x}(y^p - y^q - y^r)$

২৫. i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c} = \frac{1}{8}$

iii. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

সময়: ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট মান-৫০

[বি. দ্র. যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। প্রতি প্রশ্নের মান ১০ ১০ × ৫ = ৫০]

১.▶ (i) $a^{3-x}.b^{7x} = a^{7+x}.b^{5x}$ (ii) $a^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$.

ক. $a^2 + b^2 = 11ab$ হলে দেখাও যে, $2\log_k \frac{a-b}{3} = \log_k ab$. ২

খ. (i) হতে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$ ৪

গ. (ii) হতে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

২.▶ $a = 3^{l+1}, b = 3^{m+2}, c = 3^{n+3}$ এবং $abc = 729$

ক. $l + m + n$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $x = 1 + \log_3 bc$, $y = 2 + \log_3 ca$ এবং $z = 3 + \log_3 ab$ হয় তবে দেখাও যে, $x + l = y + m = z + n$ ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{1}{2^m + 2^{-n} + 1} + \frac{1}{2^n + 2^{-l} + 1} + \frac{1}{2^l + 2^{-m} + 1} = 1$ ৪

৩.▶ $\frac{\log(1+y)}{\log y} = 2$

ক. প্রদত্ত সমীকরণকে y চলকের একটি দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ ৪

৪.▶ $4^x = 2^y$, $(27)^{xy} = 9^{y+1}$ দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট এবং $P = \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$.

ক. $\left\{\left(\frac{1}{x^a}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. সূচকীয় সমীকরণ জোটের সমাধান কর। ৪

গ. দেখাও যে, $P = 8$. ৪

৫.▶ $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$; $x \neq \frac{1}{2}$ এবং $g(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ দুইটি ফাংশন।

ক. $f\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $f(x)$ এক-এক ফাংশন। ৪

গ. $g(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬.▶ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

ক. $4^{x+1} = 256$ হলে x এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$(q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0$ ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৭.▶ $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = \ln(1+x); x \geq 0$

ক. $(25)^x = (125)^y$ হলে $x : y$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে দেখাও যে, $3p^3 + 9p = 8$ ৪

গ. $f(x)$ এর বর্ণনাসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৮.▶ $A = a^{x-y}, B = a^{y-z}, C = a^{z-x}$

ক. প্রমাণ কর যে, $ABC = 1$ ২

খ. প্রমাণ কর যে,
$\frac{1}{1+B+A^{-1}} + \frac{1}{1+C+B^{-1}} + \frac{1}{1+A+C^{-1}} = 1$। ৪

গ. দেখাও যে,
$(x-y)\log_k\left(\frac{A}{B}\right) + (y-z)\log_k\left(\frac{B}{C}\right) + (z-x)\log_k\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{3}{2}[(x-y)^2\log_k a + (y-z)^2\log_k a + (z-x)^2\log_k a]$ ৪

সৃজনশীল বহুনির্বাচনি | মডেল প্রশ্নপত্রের উত্তর

১	খ	২	খ	৩	খ	৪	ক	৫	গ	৬	খ	৭	খ	৮	ঘ	৯	খ	১০	ক	১১	ক	১২	ঘ	১৩	ঘ
১৪	গ	১৫	ঘ	১৬	গ	১৭	গ	১৮	ঘ	১৯	ক	২০	ক	২১	গ	২২	ক	২৩	ঘ	২৪	ক	২৫	ঘ		

সৃজনশীল রচনামূলক | মডেল প্রশ্নপত্রের উত্তর

২. **ক.** 0

৩. **ক.** $1 + y = y^2$

৪. **ক.** x

খ. $(1, 2), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

৫. **ক.** 8

গ. ডোমেন = $(-1, 1)$ এবং রেঞ্জ = $\mathbb{R}$

৬. **ক.** 3

গ. ডোমেন = $(-4, 4)$, রেঞ্জ = $\mathbb{R}$

৭. **ক.** $3 : 2$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সময়: ২৫ মিনিট; মান-২৫

১. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয় তবে—

(ক) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y}$ (খ) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$

(গ) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x}$ (ঘ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

২. $\sqrt[13]{x^8\sqrt{x^6\sqrt{x^4}}}$ এর মান কত?

(ক) x (খ) x^2

(গ) x^4 (ঘ) x^6

৩. $a^x = a^y$ হলে $x = y$ হবে, যখন —

(ক) $a > 0$ ও $a \neq 1$ (খ) $a > 0$ ও $a = 1$

(গ) $a < 0$ ও $a \neq 1$ (ঘ) $a < 0$ ও $a = 1$

৪. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{9}{4}$ (খ) $\frac{3}{2}$

(গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$

৫. $a^x = a^m$ হলে ——

i. $x = 1$ এর জন্য $m = 2$

ii. $x = m$ হবে যখন $a \neq 0$ ও $a > 1$

iii. $a^{x-m} = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬. $y = 2^{-x}$ ফাংশনটি—

i. সূচক ফাংশন

ii. ডোমেন $(-\infty, \infty)$

iii. রেঞ্জ $(0, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭. সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত, নিচের কোন শর্তে?

(ক) $a < 0$ এবং $a \neq 1$

(খ) $a > 0$ এবং $a \neq 1$

(গ) $a > 0$ এবং $a = 1$

(ঘ) $a < 0$ এবং $a = 1$

৮. সূচকের ধারণা অনুযায়ী—

i. সকল $n \in \mathbb{N}, n > 1$ এর জন্য $\sqrt[n]{0} = 0$

ii. যদি $a > 0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হয়, তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল আছে।

iii. $a < 0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ বিজোড় হলে $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii

(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

$x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

উপরের তথ্যের আলোকে ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৯. নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $a = c^{\frac{z}{y}}$ (খ) $a = c^{\frac{z}{x}}$

(গ) $a \neq \frac{b^z}{c}$ (ঘ) $a = b^{\frac{y}{z}}$

১০. নিচের কোনটি ac এর সমান?

(ক) $b^{\frac{y^2}{zx}}$ (খ) $b^{\frac{yz}{y}}$

(গ) $b^{\frac{y}{x} + \frac{y}{z}}$ (ঘ) $b^{\frac{z}{y} + \frac{y}{z}}$

১১. যদি $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হয়, তবে x এর মান কত?

(ক) 32 (খ) 16

(গ) 8 (ঘ) 64

১২. যদি $\log(a^x b^y c^z) = 0$ হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $a^x b^y c^z = 0$ (খ) $a^x b^y c^z = 1$

(গ) $abc = 0$ (ঘ) $abc = 1$

১৩. $p^x = y$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $p = \log_x y$ (খ) $x = \log_p y$

(গ) $x = \log_y p$ (ঘ) $y = \log_p x$

১৪. $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হলে—

i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log_c \sqrt{c} = 2$

iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii

(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১৫. $x^{\log_x y}$ নিচের কোনটির সমান?

(ক) x (খ) y

(গ) $\log_x y$ (ঘ) $\log_y x$

১৬. $p = \log_a b + \log_a c$ হয় তবে $1 + p =$ কত?

(ক) 1 (খ) $1 + bc$

(গ) $\log_a abc$ (ঘ) $abc\log_a 1$

১৭. $\log_b \log_b \log_b (b^{b^{b^a}}) =$ কত?

(ক) b^b (খ) b^{b^b}

(গ) $b^{b^{b^a}}$ (ঘ) a

১৮. $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a =$ কত?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 8

$f(x) = \frac{x}{|x|}$ একটি ফাংশন এবং $x \in R$.

উপরের তথ্যের আলোকে ১৯ ও ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

১৯. $f(0)$ কত?

(ক) 0 (খ) 1

(গ) অসংজ্ঞায়িত (ঘ) ∞

২০. $f(x)$ এর ডোমেন কত?

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) $\varnothing$

(গ) $\mathbb{R} - \{1\}$ (ঘ) $\mathbb{R} - \{0\}$

২১. $\frac{\log_k(1 + 3x)}{\log_k x} = 2$ হলে এর দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি?

(ক) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (খ) $x^2 - 3x - 1 = 0$

(গ) $2x = 3x - 1$ (ঘ) $3x = x^2 + 1$

২২. $F(x) = \sqrt{5 - x}$ ফাংশনটির—

i. ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$

ii. রেঞ্জ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

iii. বিপরীত ফাংশন $F^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২৩. সূচকের ক্ষেত্রে—

i. $\sqrt{4} = 2$

ii. $\sqrt[3]{-8} = -2$

iii. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ যখন, } a \geq 0 \\ -a \text{ যখন, } a < 0 \end{cases}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২৪. $\log_4 2 + \log_6 \sqrt{6} =$ কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) 1

(গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) -2

২৫. i. $\log_x x\sqrt{x}\sqrt[3]{x} = 3$

ii. $a^x = b$ হলে, $x = \log_a b$

iii. $\log_{2\sqrt{5}} 400 = x$, হলে x এর মান $\frac{1}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

সময়: ২ ঘণ্টা ৩৫ মিনিট মান-৫০

[বি. দ্র. যেকোনো ৫টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। প্রতি প্রশ্নের মান ১০ $১০ \times ৫ = ৫০$]

১. ▶ $P = x^a, Q = x^b$ এবং $R = x^c$

ক. দেখাও যে, $P \times Q \times R = x$ হলে $a + b + c = 1$ ২

খ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় করো। ৪

গ. যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{P + \frac{1}{Q} + 1} + \frac{1}{R + \frac{1}{P} + 1} + \frac{1}{Q + \frac{1}{R} + 1} = 1$$ ৪

২. ▶ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $z^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ যেখানে $z \geq 0$

ক. $p + q + r = 3$ হলে $abc =$ কত? ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r}. b^{r-p}. c^{p-q} = 1$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3z^3 + 9z - 8 = 0$ ৪

৩. ▶ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}, b \geq 0$.

ক. $\frac{5^{n+2} + 35 \times 5^{n-1}}{4 \times 5^n}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$. ৪

৪. ▶ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

ক. $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে, $x =$ কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(q - r) \log_k a + (r - p) \log_k b + (p - q) \log_k c = 0$. ৪

গ. $f(x) =$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫. ▶ $A = a^{x-y}, B = a^{y-z}, C = a^{z-x}$

ক. প্রমাণ কর যে, $ABC = 1$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1 + B + A^{-1}} + \frac{1}{1 + C + B^{-1}} + \frac{1}{1 + A + C^{-1}} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(x - y)\log_k \left(\frac{A}{B}\right) + (y - z)\log_k \left(\frac{B}{C}\right) + (z - x) \log_k \left(\frac{C}{A}\right) = \frac{3}{2}[(x - y)^2 \log_k a + (y - z)^2 \log_k a + (z - x)^2 \log_k a]$ ৪

৬. ▶ নীচের রাশিগুলো লক্ষ্য কর: ।

(i) $\frac{x(y + z - x)}{\log_k x} = \frac{y(z + x - y)}{\log_k y} = \frac{z(x + y - z)}{\log_k z}$

(ii) $y = 3^x$

ক. x এর মান নির্ণয় করো যখন $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ ২

খ. প্রদত্ত (i) এর সাহায্যে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ ৪

গ. প্রদত্ত (ii) নং এর লেখচিত্র অংকন করো। ৪

৭. ▶ $x = \frac{4^a}{4^b}, y = \frac{4^b}{4^c}, z = \frac{4^c}{4^a}$

ক. $\log_4 x = 0$ হলে দেখাও যে, $a = b$. ২

খ. $x^{a^2 + ab + b^2} \times y^{b^2 + bc + c^2} \times z^{c^2 + ca + a^2} =$ কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(a + b - c)\log_4 x + (b + c - a) \log_4 y + (c + a - b) \log_4 z = 0$ ৪

৮. ▶ $M = x + \sqrt{x^2 - 1}, N = x - \sqrt{x^2 - 1}$

ক. $M = N$ হলে x এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $M + \frac{1}{M} = N + \frac{1}{N}$ ৪

গ. $MN = 1$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\log_k \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \log_k (x - \sqrt{x^2 - 1})$$ ৪

নিজেকে যাচাই করি: বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

উত্তর																										
	১	ঘ	২	ক	৩	ক	৪	ক	৫	গ	৬	ঘ	৭	খ	৮	ঘ	৯	খ	১০	গ	১১	ক	১২	খ	১৩	খ
	১৪	গ	১৫	খ	১৬	গ	১৭	ঘ	১৮	ঘ	১৯	গ	২০	ঘ	২১	খ	২২	ক	২৩	ক	২৪	খ	২৫	ক		

নিজেকে যাচাই করি: সৃজনশীল প্রশ্ন

১. **খ.** 1

২. **ক.** x^3

৩. **ক.** 8

৪. **ক.** $\frac{1}{3}$; **গ.** ডোমেন $D_f = (-4, 4)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

৬. **ক.** 32

৭. **খ.** 1

৮. **ক.** ± 1