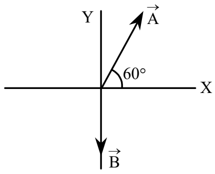
মূল বইয়ের অতিরিক্ত অংশ
দ্বিতীয় অধ্যায়
ভেক্টর

পরীক্ষায় কমন পেতে অনন্য প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন ▶ ১



চিত্রে, $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$

◀ *শিখনফল: ৪ ও ৭ [ঢা. বো. ২০১৬]*

ক. স্পর্শ কোণ কাকে বলে? ১

খ. ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান কেন? ২

গ. চিত্রে $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $(\vec{A}\times\vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A}+\vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত– গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু থেকে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন পদার্থের সাথে তরলের অভ্যন্তরে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কঠিন ও তরলের স্পর্শ কোণ বলে।

খ পাখার প্রতিটি কণা ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে সমান সময়ে সমান কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। তাই প্রতিটি কণার কৌণিক বেগ একই থাকে।

গ এখানে, $|\vec{A}| = A = 5$

$|\vec{B}| = B = 6$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90° + 60° = 150°$

$|\vec{C}| = C = ?$

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ হলে

$$|\vec{C}| = C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \alpha)}$$
$$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2\times5\times6\cos(180° - 150°)}$$
$$= \sqrt{25 + 36 + 60\cos30°} = 10.63$$

ঘ X-অক্ষ বরাবর– $\vec{A}$ এর উপাংশ, $A_X = |\vec{A}|\cos 60°$

$$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\vec{B}$ এর উপাংশ, $B_X = |\vec{B}|\cos(-90°) = 0$

Y-অক্ষ বরাবর– $\vec{A}$ এর উপাংশ, $A_Y = |\vec{A}|\sin 60°$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\vec{B}$ এর উপাংশ, $B_Y = |\vec{B}|\sin(-90°) = -6$

$$\therefore \vec{A} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$

$$\vec{B} = -6\hat{j}$$

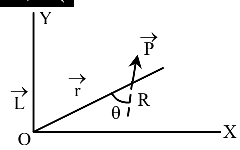
$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \left(\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) - 6\hat{j}$$
$$= \frac{5}{2}\hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 6\right)\hat{j}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -15\hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= -15\hat{k}.\left[\frac{5}{2}\hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 6\right)\hat{j}\right]$$
$$= 0$$

অতএব, $(\vec{A}\times\vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A}+\vec{B})$ এ উপর লম্ব।

প্রশ্ন ▶ ২



R বিন্দুতে বস্তুর ভর $m = 2kg$

$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m

$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$ ms^{-1}

$\vec{P}$ = ভরবেগ।

◀ *শিখনফল: ৭ [দি. বো. ২০১৬]*

ক. মুক্তি বেগ কাকে বলে? ১

খ. বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $b = 2$ হলে বস্তুর কৌণিক ভরবেগের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হলে b এর মানের কীরূপ পরিবর্তন হবে– বিশ্লেষণ কর। ৪

২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

খ আমরা জানি, কেন্দ্রমুখী বল, $F = m\omega^2 r$। এখানে m বস্তুর ভর, ω কৌণিক বেগ এবং r বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ। একটি নির্দিষ্ট ভরের বস্তু একটি নির্দিষ্ট কৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে

পরিভ্রমণ করলে, $F \propto r$ অর্থাৎ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়।

গ দেয়া আছে, বস্তুর ভর, $m = 2$ kg

$$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})\ \text{m}$$
$$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ \text{m·s}^{-1}$$

কৌণিক ভরবেগের মান, $L = ?$

$b = 2$ হলে

$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ m

$\vec{P} = m\vec{v} = 2\ \text{kg} \times (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ \text{m·s}^{-1} = (4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k})\ \text{kg·m·s}^{-1}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\ (-8 + 16) - \hat{j}\ (4 - 8) + \hat{k}\ (-8 + 8)$$
$$= (8\hat{i} + 4\hat{j})\ \text{kg·m}^2\text{·s}^{-1}$$

কৌণিক ভরবেগের মান $= |\vec{L}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}\ \text{kg·m}^2\text{·s}^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ দেয়া আছে,

$$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})\ \text{m}$$
$$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ \text{m·s}^{-1}$$

$\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\vec{r} \times \vec{v} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & b \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $(-4 + 4b)\hat{i} + (2b - 2)\hat{j} + (-4 + 4)\hat{k} = 0$

বা, $(-4 + 4b)\hat{i} + (2b - 2)\hat{j} = 0$

এখন, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-4 + 4b = 0$ বা, $b = 1$

এবং $2b - 2 = 0$ বা, $b = 1$

$\therefore$ $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $b = 1$ হবে।

আবার, $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর লম্ব হলে,

$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

বা, $(\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

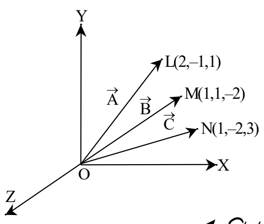
বা, $2 + 8 + 2b = 0$

বা, $2b = -10$

$\therefore b = -5$

অতএব, $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর লম্ব হলে $b = -5$ হবে। সুতরাং $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ এর লম্ব অবস্থায় b এর মান সমান্তরাল অবস্থায় b এর মানের চেয়ে $1 - (-5) = 6$ কম হবে।

প্রশ্ন ▶৩



◀ *শিখনফল: ৭ [কু. বো. ২০১৬]*

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

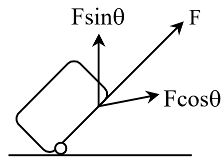
গ. $\vec{C}$, X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত? ৩

ঘ. $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কি না গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল দ্বারা ট্রলি ব্যাগকে সামনের দিকে টেনে নিয়ে যাওয়ার সময় হাতলে প্রযুক্ত বল F দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি $F\sin\theta$ এবং অপরটি $F\cos\theta$। $F\sin\theta$ উপাংশটি উপরের দিকে কার্যরত হয়, এবং $F\cos\theta$ উপাংশটি ব্যাগকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। হাতল লম্বা হলে θ এর মান কম হয়। এ অবস্থায় $\cos\theta$ এর মান বেশি হয় এবং ট্রলির বেগ ধ্রুব রেখে টানতে কম বল লাগে। এ কারণে ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।



গ দেয়া আছে, N বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, - 2, 3)

সুতরাং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

যেহেতু X অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\hat{i}$, সুতরাং $\hat{i}$ এর সাথে কোণই X অক্ষের সাথে কোণ

$\vec{C}$ ও X অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = ?$

$$\cos\theta = \frac{\vec{C} \cdot \hat{i}}{C} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot \hat{i}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.267$$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(0.267) = 74.5°$ **(Ans.)**

ঘ প্রদত্ত চিত্রের তথ্যানুসারে,

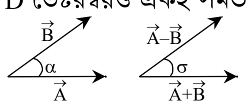
$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

ধরা যাক, $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= (3 - 4)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-2 - 1)\hat{k}$$
$$= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

এখন আমাদেরকে দেখতে হবে, $\vec{A}$ ও $\vec{D}$ একই সমতলে কি না। দুটি ভেক্টর যে অবস্থাতেই থাক না কেন তারা একই সমতলে। সুতরাং $\vec{A}$ ও $\vec{D}$ ভেক্টরদ্বয়ও একই সমতলে।

প্রশ্ন ▶৪



চিত্র-১ চিত্র-২

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

◀ *শিখনফল: ৭ [চ. বো. ২০১৬]*

ক. লব্ধ একক কী? ১

খ. দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. α-এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. α-এর মানের পরিবর্তন কত হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ এক-চতুর্থাংশ হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সকল একক মৌলিক একক সমন্বয়ে গঠিত হয় তাদেরকে লব্ধ একক বা যৌগিক একক বলে।

খ দুইটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না। কারণ দুটি ভেক্টর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি সর্বনিম্ন হয় এবং এক্ষেত্রে লব্ধির মান হয় ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান। তাই অসমান সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের লব্ধি কখনোই শূন্য হতে পারে না।

গ দেয়া আছে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$A = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$

$B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).\ (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 12 - 6 - 2$

$= 4$

আমরা জানি,

বা, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \dfrac{4}{3 \times 7} = \dfrac{4}{21}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right)$

$\therefore\ \alpha = 79.02°$ (প্রায়)

$\therefore\ \vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 79.02°$ (প্রায়)। **(Ans.)**

ঘ মনে করি, α এর পরিবর্তে কোণের মান α' করলে $\vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ এক চতুর্থাংশ হবে।

যেহেতু, $\alpha = 79.02°$ [(গ) অংশ হতে প্রাপ্ত]

$\therefore\ \vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ,

$B\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$

$= \dfrac{4}{3}$; [$\vec{A} \cdot \vec{B}$ এবং A এর মান (গ) হতে]

$\therefore\ \vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপের এক চতুর্থাংশ $= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

এখন,

$B\cos\alpha' = \dfrac{1}{3}$

বা, $7\cos\alpha' = \dfrac{1}{3}$

বা, $\alpha' = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{21}\right)$

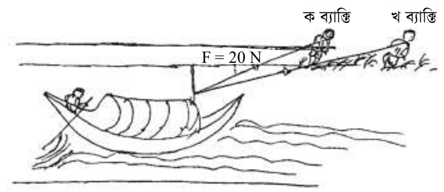
$\therefore\ \alpha' = 87.27°$

$\therefore$ কোণের মান $87.27°$ হলে $\vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ পূর্বের এক চতুর্থাংশ হবে।

$\therefore\ \alpha$ এর মানের পরিবর্তন $= 87.27° - 79.02° = 8.25°$

সুতরাং α এর মান $8.25°$ বাড়ালে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ পূর্বের এক চতুর্থাংশ হবে।

প্রশ্ন ▶৫



◀ *শিখনফল: ৫ [সি. বো. ২০১৬]*

ক. টর্ক কাকে বলে? ১

খ. $\hat{i}.\hat{i} = 0$ হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. যদি ক ব্যক্তি অনুভূমিকের সাথে $45°$ কোণে গুণ টানে তবে বলের অনুভূমিক উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. যদি ক ব্যক্তি ও খ ব্যক্তি একই বলে নৌকা দুটি টানে তবে কে সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও। ৪

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যা কোনো অঘূর্ণনশীল বস্তুতে ঘূর্ণন সৃষ্টি করে বা ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তন করে তাকে টর্ক বলে।

খ $\hat{i}\ .\ \hat{i} = 0$ নয় 1।

$\hat{i}$ এবং $\hat{i}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $0°$

$\therefore\ \hat{i}\ .\ \hat{i} = 1 \times 1 \times \cos0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$।

গ দেওয়া আছে, অনুভূমিকের সাথে কোণ, $\theta = 45°$

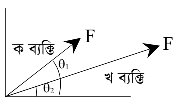
প্রযুক্ত বল, $F = 20$ N

$\therefore$ অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$

$= 20\cos 45°$

$= 20 \times 0.7071$ N

$= 14.142$ N **(Ans.)**



ঘ চিত্র থেকে স্পষ্ট যে, $\theta_1 > \theta_2$

$\therefore\ \cos\theta_1 < \cos\theta_2$

$\therefore\ F\cos\theta_1 < F\cos\theta_2$

$\therefore$ খ ব্যক্তি সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে।

প্রশ্ন ▶৬ কোনো এক বৃষ্টির দিনে আসাদ ঘরের দরজায় দাঁড়িয়ে বৃষ্টি দেখছিল। বৃষ্টি উল্লম্বভাবে $6\ \text{kmh}^{-1}$ বেগে পড়ছিল। এমন সময় আসাদ দেখল এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে $33.8°$ কোণে ছাতা ধরে পায় হেঁটে চলছে। অপর এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে $53.06°$ কোণে ছাতা ধরে সাইকেলে চলছে। উভয়ই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেল। ◀ *শিখনফল: ৪ [য. বো. ২০১৬]*

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রাসের বেগ বিশ্লেষণ কর। ২

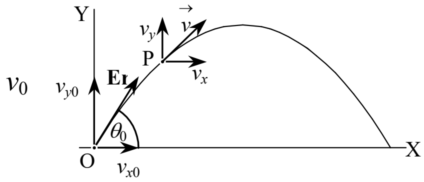
গ. পায়ে হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ব্যক্তিদ্বয়ের ভিন্ন কোণে ছাতা ধরার কারণ ব্যাখ্যা কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডানহাতি ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ প্রাসের বেগ সমত্বরণে দ্বি-মাত্রিক গতির একটি উৎকৃষ্ট উদাহরণ।



মনে করি, ভূমির উপরস্থ O বিন্দু থেকে $\vec{v_0}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে θ_0 কোণে একটি প্রাসকে নিক্ষেপ করা হলো। X ও Y অক্ষ বরাবর আদিবেগের উপাংশগুলো হলো যথাক্রমে

$$v_{x0} = v_0\cos\theta_0$$
$$v_{y0} = v_0\sin\theta_0$$

বস্তুটি t সময় পর P অবস্থানে পৌঁছালে তার বেগ $\vec{v}$ এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে,

$$v_x = v_{x0} = v_0\cos\theta_0 \text{ এবং}$$
$$v_y = v_{y0} - gt = v_0\sin\theta_0 - gt$$

সুতরাং t সময়ে বা P অবস্থানে, প্রাসের বেগ $\vec{v}$ এর মান হলো $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ এবং বেগ $\vec{v}$, X অক্ষ তথা অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

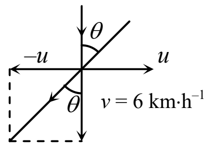
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

গ দেয়া আছে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6 \text{ km·h}^{-1}$

ছাতা ও উল্লম্বের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 33.8°$

পায় হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ, $u = ?$

চিত্র হতে পাই,



$$\tan\theta = \frac{u}{v}$$

বা, $u = v\tan\theta$

$= 6 \times \tan 33.8°$

$= 4 \text{ km·h}^{-1}$ **(Ans.)**

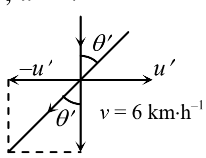
ঘ সাইকেলে চলা ব্যক্তির ছাতা ও উল্লম্বের সাথে—

উৎপন্ন কোণ, $\theta' = 53.06°$

বৃষ্টির বেগ, $v = 6 \text{ km·h}^{-1}$

সাইকেলে চলা ব্যক্তির বেগ, $u' = ?$

চিত্র হতে পাই,



$$\tan\theta' = \frac{u'}{v}$$

বা, $u' = v\tan\theta'$

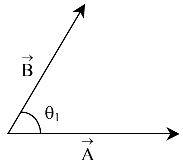
$= 6 \times \tan 53.06°$

$= 7.98 \text{ km·h}^{-1}$

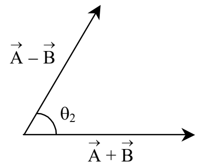
'গ' অংশ হতে পাই, পায়ে হাঁটা ব্যক্তির বেগ, $u = 4 \text{ km·h}^{-1}$

ব্যক্তিদ্বয়ের বেগ ভিন্ন হওয়ায় তাদের সাপেক্ষে বৃষ্টির পানির আপেক্ষিক বেগও ভিন্ন। অর্থাৎ উলম্বের সাথে আপেক্ষিক বেগের উৎপন্ন কোনও ভিন্ন। তাই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবার জন্য ব্যক্তিদ্বয়ের ভিন্ন কোণে ছাতা ধরতে হয়েছিল।

প্রশ্ন ▶ ৭



চিত্র-১



চিত্র-২

উপরের চিত্রে $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

◀ *শিখনফল: ৬ ও ৭ [ব. বো. ২০১৬]*

ক. ঘাত বল কাকে বলে? ১

খ. একটি ইঞ্জিনের দক্ষতা 60% বলতে কী বুঝায়? ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। ৪

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

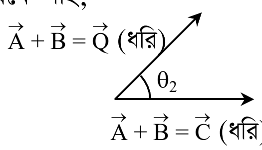
খ একটি ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 60% বলতে বুঝায়, যদি এই ইঞ্জিনে 100 J শক্তি দেয়া হয় তাহলে সেই ইঞ্জিন থেকে প্রাপ্ত মোট কার্যকর শক্তি হবে 60 J।

গ ৪(গ)নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর: $\theta_1 = 24.87°$।

ঘ 'গ' নং প্রশ্নের আলোকে আমরা θ_1 এর মান পাই 24.87°।

আবার চিত্র–২ থেকে পাই,



এখানে, $\vec{P} = \vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

এবং $\vec{Q} = \vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$

$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 3 \times (-1) + (-4) \times (2) + 7 \times (-5)$

$= -3 - 8 - 35$

$= -46$

$P = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 7^2}$

$= \sqrt{74}$

$Q = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{30}$

$\therefore \cos\theta_2 = \dfrac{-46}{\sqrt{74} \times \sqrt{30}}$

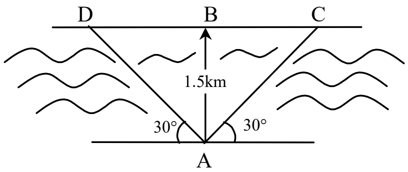
$= -0.9763$

$\Rightarrow \theta_2 = \cos^{-1}(-0.9763) = 167.5°$

কাজেই $\theta_2 > \theta_1$

$\therefore$ দেখা যায় যে $\theta_2 = \theta_1$ হওয়া সম্ভব নয়।

প্রশ্ন ▶৮



চিত্রে প্রবাহমান নদীটির প্রশস্ততা 1.5 km এবং স্রোতের বেগ 4 kmh^{-1}। রহমত মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌঁছালেন। নৌকার বেগ 3 kmh^{-1}।

◀ *শিখনফল: ৫ [ঢা. বো. ২০১৫]*

ক. স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাকে বলে? ১

খ. ভর ও জড়তার ভ্রামকের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

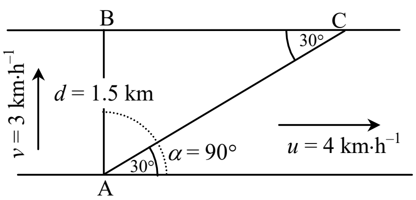
ঘ. AD বরাবর নৌকা চালিয়ে রহমত মাঝি কি B বিন্দুতে পৌছাতে পারবেন? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। ৪

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সমস্ত সংঘর্ষের ক্ষেত্রে গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে তাকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

খ ভর হচ্ছে বস্তুর জড়তার পরিমাপ। বস্তু যে ধর্মের কারণে কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে তার কৌণিক গতির পরিবর্তনে বাধা দেয় তাকে তার ঘূর্ণন জড়তা বা জড়তার ভ্রামক বলে। অর্থাৎ রৈখিক গতির ক্ষেত্রে ভর যে ভূমিকা পালন করে কৌণিক গতির ক্ষেত্রে ঘূর্ণন জড়তা বা জড়তার ভ্রামক সে ভূমিকা পালন করে। কোনো বস্তুর ভর সকল ক্ষেত্রে ধ্রুব অপর পক্ষে নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর ঘূর্ণন জড়তা নির্দিষ্ট কিন্তু ভিন্ন ভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে ভিন্ন ভিন্ন।

গ



মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌছাল।

স্রোত ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

প্রদত্ত চিত্রানুসারে,

ΔABC এ, $\angle ACB = \theta = 30°$

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC}$

বা, $AC = \frac{AB}{\sin\theta} = \frac{1.5\ km}{\sin 30°} = \frac{1.5\ km}{0.5}) = 3\ km$

AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 km **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি,

স্রোতের বেগ, $u = 4\ km{\cdot}h^{-1}$

নৌকার বেগ, $v = 3\ km{\cdot}h^{-1}$

নৌকার পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{AB}{v} = \frac{1.5\ km}{3\ km{\cdot}h^{-1}} = 0.5$ h

এ সময় নৌকা স্রোতের দিকে BC দূরত্ব অতিক্রম করবে, সুতরাং

$\therefore BC = u \times t = 4\ km{\cdot}h^{-1} \times 0.5\ h = 2\ km$

সুতরাং $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (1.5\ km)^2 + (2\ km)^2 = 6.25\ km^2$

$\therefore AC = 2.5\ km$

(দুই পদ্ধতিতে AC এর দুটি ভিন্ন মান পাওয়া যায়। সুতরাং প্রদত্ত তথ্য ত্রুটি পূর্ণ)

ঘ AD বরাবর নৌকা চালালে চিত্রানুসারে স্রোতের বেগ u ও নৌকার বেগ v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180° - 30° = 150°$। সুতরাং স্রোতের বেগ ও লব্ধি বেগের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} = \frac{3\sin 150°}{4 + 3\cos 150°}$$

$$= \frac{3\times 0.5}{4 + 3\times(-0.866025)} = \frac{1.5}{4 - 2.598} = 1.07$$

$$\therefore \theta = 46.91°$$

এখানে, $\theta < 90°$। সুতরাং নৌকা AB বরাবর নদী পার হতে পারবে না।

বিকল্প উত্তর: চিত্রানুসারে স্রোতের বেগ u ও নৌকার বেগ v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180° - 30° = 150°$। সুতরাং স্রোতের বেগ ও লব্ধি বেগের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

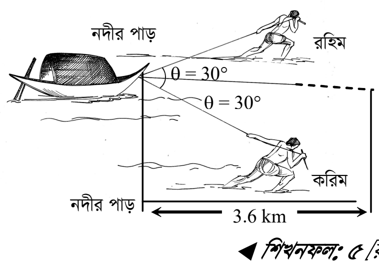
$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

এখন, $\theta = 90°$ হতে হলে $u + v\cos\alpha = 0$ হবে। কিন্তু

$$u + v\cos\alpha = 4 + 3\cos 150°$$
$$= 4 + 3 \times -0.866025$$
$$= 4 - 2.598 = 1.402 \neq 0$$

সুতরাং নৌকা AB বরাবর নদী পার হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶৯ নিচের চিত্রে করিম ও রহিম দুজন মাঝি স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দু'তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে $\vec{F}$ বলে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6 km পথ অতিক্রম করে। করিম রহিমকে বলে "সমান টানে এ দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌছা সম্ভব।" [নৌকার তল ও পানির ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়]।



◀ *শিখনফল: ৫ [রা. বো. ২০১৫]*

ক. ভেক্টর বিশ্লেষণ কী? ১

খ. নাল ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই কেন? ২

গ. উদ্দীপকের $\vec{F}$ এর মান বের কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে করিমের বক্তব্য সঠিক কিনা — গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। ৪

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরে এমনভাবে বিভক্ত করা হয়, যাদের লব্ধি হবে মূল ভেক্টর, তবে এ বিভক্তকরণ প্রক্রিয়াকে ভেক্টরের বিশ্লেষণ বলে।

খ নাল ভেক্টর হলো শূন্য ভেক্টর। এর মান শূন্য বলে এর কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তাই এর দিক যেকোনো দিকেই বিবেচনা করা যেতে পারে।

গ ধরা যাক, করিম ও রহিমের প্রযুক্ত বল দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 2θ। সুতরাং বল দ্বয়ের লব্ধি

$$R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \times F \cos 2\theta}$$
$$= F\sqrt{1 + 1 + 2 \cos 2\theta}$$
$$= F\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$
$$= F\sqrt{2 \times 2\cos^2\theta}$$
$$= 2F\cos\theta$$

এখন প্রদত্ত তথানুসারে $\theta = 30°$। সুতরাং

$$R = 2F\cos 30° = \sqrt{3}\, F$$

নৌকার আদিবেগ, $u = 0\ \text{m·s}^{-1}$

সময়কাল, $t = 5\ \text{min} = 300\ \text{sec}$

সরণ, $s = 3.6\ \text{km} = 3600\ \text{m}$

আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

বা, $a = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{2 \times 3600\ \text{m}}{(300\ \text{s})^2} = 0.08\ \text{m·s}^{-2}$

সুতরাং, $\sqrt{3}\, F = ma = 500\ \text{kg} \times 0.08\ \text{m·s}^{-2} = 40\ \text{N}$

$\therefore\ F = \dfrac{40\ \text{N}}{\sqrt{3}} = 23.094\ \text{N}$ **(Ans.)**

ঘ "গ" অনুসারে,

লব্ধি টান, $R = 2F\cos\theta$

$s = 3.6\ \text{km} = 3600\ \text{m}$

$\therefore$ সময়, t হলে,

$t < 5\ \text{min}$

বা, $\sqrt{\dfrac{2s}{a}} < 5 \times 60\text{s}$

বা, $a > \dfrac{2s}{(300)^2}$

বা, $\dfrac{R}{m} > \dfrac{2 \times 3600}{90000}$

বা, $R > \dfrac{2 \times 3600 \times 500}{90000}$

বা, $2F\cos\theta > 40$

বা, $\cos\theta > \dfrac{20}{F}$

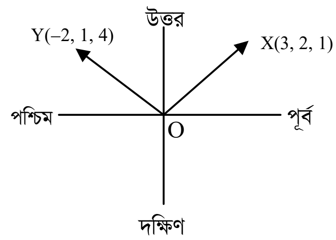
বা, $\cos\theta > \dfrac{20}{\dfrac{40}{\sqrt{3}}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta < 30°$

অতএব, θ এর মান 30° এর চেয়ে কমিয়ে সময় 5 min এর চেয়ে কমানো সম্ভব। এ ক্ষেত্রে তাদের তীরের একটি নিকটে এসে টানতে হবে। অর্থাৎ করিমের বক্তব্য সঠিক।

প্রশ্ন ►১০



উদ্দীপকে X ও Y বিন্দু দুইটি কলেজের অবস্থান নির্দেশ করে। O উভয় কলেজের যাত্রা অবস্থানের সাধারণ বিন্দু।

◄ *শিখনফল: ৫ [দি. বো. ২০১৫]*

ক. তাৎক্ষণিক ত্বরণ কাকে বলে? ১

খ. উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায় কেন? ২

গ. $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর এবং $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর, একই হবে কি? প্রয়োজনীয় গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যুক্তি দাও। ৪

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো গতিশীল বস্তুর কোনো বিশেষ মুহূর্তে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময় ব্যবধানে বেগের পরিবর্তনের হারকে ঐ বিশেষ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

খ উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বলের দিক নিচের দিকে। তাই অভিকর্ষজ ত্বরণের দিকও খাড়া নিচের দিকে। এ ত্বরণের কারণে উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায়।

গ এখানে, X বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2, 1)

Y বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, 1, 4)

তাহলে,

$$\overrightarrow{OX} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ এবং } \overrightarrow{OY} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

বের করতে হবে, এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$$

বা, $|\overrightarrow{OX}|\ |\overrightarrow{OY}| \cos\theta = 3 \times (-2) + 2 \times 1 + 1 \times 4 = 0$
বা, $\cos\theta = 0$
$\therefore\ \theta = \cos^{-1}0 = 90°$
অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°। **(Ans.)**

ঘ $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}|}$

এখানে, $\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}$

আবার, $|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}| = \sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2} = 7\sqrt{6}$

$\therefore\ \dfrac{\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}|} = \dfrac{7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}}{7\sqrt{6}} = \dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$

কিন্তু $\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX}$এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}}{|\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}|}$

সুস্পষ্টত: $\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX} = -(\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}) = -7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}$

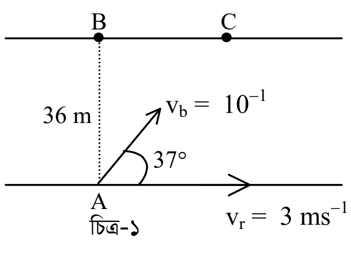
এবং $|\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}| = 7\sqrt{6}$

$\therefore\ \dfrac{\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}}{|\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}|} = \dfrac{-7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}}{7\sqrt{6}} = -\dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$

অর্থাৎ লম্ব একক ভেক্টরদ্বয় মানে সমান হলেও দিকে পরস্পর বিপরীত।

$\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর কাগজপৃষ্ঠ হতে লম্বভাবে খাড়া ওপর দিকে ক্রিয়া করে এবং $\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX}$ এর তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর কাগজপৃষ্ঠ হতে লম্বভাবে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

প্রশ্ন ▶১১ 36 m চওড়া একটি নদীতে 10 ms^{-1} বেগে একটি নৌকা চলছে (চিত্র-১)। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌছাল। নদীতে স্রোতের বেগ 3ms^{-1}।



চিত্র-১

◀ শিখনফল: ৫ [কু. বো. ২০১৫]

ক. কার্ল কি? ১
খ. কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয় — ব্যাখ্যা কর। ২
গ. নদীটির বিপরীত পাড়ের BC দুরত্ব বের কর। ৩
ঘ. নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে পৌছাতে হলে, মাঝির কি ব্যবস্থা নিতে হবে? ৪

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{v}\ (x, y, z)$ অন্তরিকরণযোগ্য ভেক্টর ক্ষেত্র হলে $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ কে $\vec{v}$ এর কার্ল বলে।

খ আমরা জানি, বেগ একটি ভেক্টর রাশি। মান অথবা দিক অথবা উভয়ের পরিবর্তনে ভেক্টরের পরিবর্তন হয়। কোনো বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণন কালে বেগের মান পরিবর্তিত না হলেও প্রতি মুহূর্তে দিকের পরিবর্তন হয় এবং বেগের দিক হয় যেকোনো বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর। সুতরাং বলা যায়, কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়।

গ নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ $= v_b \sin37°$
$= 10\ m{\cdot}s^{-1} \times \sin37° = 6.02\ m{\cdot}s^{-1}$
$\therefore$ নদী পার হতে সময়, $t = \dfrac{d}{6.02\ m{\cdot}s^{-1}} = \dfrac{36\ m}{6.02\ m{\cdot}s^{-1}}$
$= 5.982$ sec
নদীর পাড় বরাবর বেগের উপাংশের যোগফল
$= v_b \times \cos37° + V_r$
$= 10\ m{\cdot}s^{-1} \times \cos37° + 3\ m{\cdot}s^{-1} = 10.986\ m{\cdot}s^{-1}$
$\therefore$ দূরত্ব, $BC = 10.986\ m{\cdot}s^{-1} \times 5.982$ sec
$= 65.72$ m **(Ans.)**

ঘ নৌকাটিকে A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌঁছাতে হলে নৌকা ও স্রোতের বেগের লব্ধি এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হতে হবে। নৌকা ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে আমরা পাই

$$\tan90° = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$$
বা, $\infty = \dfrac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$
বা, $v_r + v_b \cos\alpha = 0$
বা, $\cos\alpha = -\dfrac{v_r}{v_b} = -\dfrac{3\ m{\cdot}s^{-1}}{10\ m{\cdot}s^{-1}} = -0.3$
$\therefore\ \alpha = 107.45°$

সুতরাং A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌঁছাতে হলে নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে 107.45° কোণে চালনা করতে হবে।

প্রশ্ন ▶১২ সাবিহা একদিন শপিং মলে বাজার করার সময় ট্রলি গাড়ী ব্যবহার করল। সে ট্রলি গাড়ীর হেন্ডেলটিতে উলম্বের সাথে 30° কোণে 10N বল প্রয়োগ করে গাড়ীটিকে ঠেলতে থাকে। এই দেখে দোকানদার বলল, আপনি গাড়ীর হেন্ডেল ধরে টানেন, তাহলে কম বল লাগবে। ◀ শিখনফল: ৬ [য. বো. ২০১৫]

ক. লব্ধি ভেক্টর কী? ১
খ. অভিকর্ষজ বল অসংরক্ষণশীল বল নয়— ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত? ৩

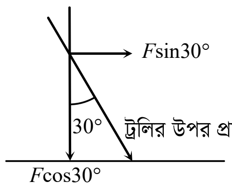
ঘ. দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে সামনে টানতে বলল কেন– যুক্তিসহ গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক একই জাতীয় ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরগুলোর লব্ধি ভেক্টর বলে।

খ অভিকর্ষ বলের ক্ষেত্রে এক বিন্দু হতে অপর বিন্দুতে বস্তুর গমনের ফলে কৃতকাজ, পথের ওপর নির্ভর করে না বরং আদি ও অন্তবিন্দুর ওপর নির্ভর করে। বস্তুটি পুনরায় আদি বিন্দুতে ফিরে এলে কৃত কাজ শূন্য হয় এবং শক্তির অপচয় ঘটে না। তাই অভিকর্ষ বল অসংরক্ষণশীল বল নয় অর্থাৎ সংরক্ষণশীল বল।

গ

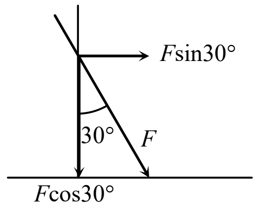


ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল = প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ।

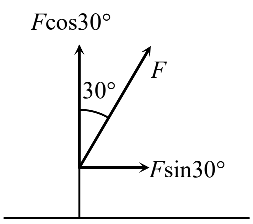
$= F\sin 30° = 10\text{ N} \times 0.5 = 5\text{ N}$

(Ans.)

ঘ



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্র-১ অনুসারে যখন ট্রলিকে ঠেলা হচ্ছে তখন বলের উলম্ব উপাংশ $F\cos 30°$ নিচের দিকে ক্রিয়া করছে। ট্রলির ওজন W হলে, নিম্নমুখী মোট বল $= W + F\cos 30°$

এতে ভূমির প্রতিক্রিয়া বল বৃদ্ধি পায় ফলে ঘর্ষণ বল বেশি হয় কারণ ঘর্ষণ বল অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক। অপর পক্ষে ট্রলিটিকে চিত্র-২ অনুসারে টানা হলে বলের উলম্ব উপাংশ $F\cos 30°$ উপরের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে নিম্নমুখী মোট বল $= W - F\cos 30°$

এতে ভূমির প্রতিক্রিয়া বল হ্রাস পায় ফলে ঘর্ষণ বল কম হয়। এ কারণে ট্রলি ঠেলার থেকে টানা সহজ হয়। তাই দোকানদার সাবিহাকে ট্রলি টানতে বলেছিল।

প্রশ্ন ▶১৩ $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (-5y - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$।

◀ শিখনফল: ৭ ও ৯

ক. সরণ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. স্ফেরোমিটারে যান্ত্রিক ত্রুটি বোঝার উপায় ব্যাখ্যা করো। ২

গ. div $\vec{V}$ নির্ণয় করো। ৩

ঘ. $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলের উপর অবস্থিত হওয়ার শর্ত কী?– গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক রৈখিক বা সরল পথে কোনো বিন্দুর দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে।

খ স্ফেরোমিটারের যান্ত্রিক ত্রুটি ২টি, যথা: (ক) শূন্য ত্রুটি ও (খ) পিছট ত্রুটি।

(ক) **শূন্য ত্রুটি:** রৈখিক স্কেলের শূন্য দাগ, বৃত্তাকারে স্কেলের শূন্য দাগের সাথে না মিললে শূণ্য ত্রুটি হয়।

(খ) **পিছট ত্রুটি :** পীচের এক বার ঘূর্ণনে রৈখিক স্কেল বরাবর বৃত্তাকার স্কেলের যথেষ্ট সরণ না ঘটলে এই ত্রুটি হয়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (-5y - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$

$\therefore \text{div } \vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(x + 3y)\hat{i} + (-5y - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}\}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(-5y - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + 4z)$

$= 1 - 5 + 4$

$\therefore \text{div } \vec{V} = 0$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে,

$\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি একই সমতলের উপর অবস্থিত হলে,

$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$ হবে

বা, $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

বা, $m(-10 + 12) - 1(15 - 4) - (-9 + 2) = 0$

বা, $2m - 11 + 7 = 0$

বা, $2m = 4$

$\therefore m = 2$

অর্থাৎ m এর মান 2 হলে $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ভেক্টরদ্বয় একই সমতলের উপর অবস্থিত হবে।

প্রশ্ন ▶ ১৪ রেজা এবং রফিক দুই বন্ধু। রেজা X স্কুলে এবং রফিক Y স্কুলে পড়ে। বাড়ি থেকে রেজার স্কুলের দিকে রেজার সরণ $r_1 = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ m এবং রফিকের স্কুলের দিকে রফিকের সরণ $r_2 = (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$ m ◀ *শিখনফল:৬*

ক. মৌলিক বল কাকে বলে? ১
খ. গ্যাস ও বাষ্পের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করো। ২
গ. স্কুল দুটোর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো। ৩
ঘ. রফিকের স্কুলের দিকে রেজার সরণ ও রেজার স্কুলের দিকে রফিকের সরণের মধ্যে কোনটির মান বেশি? গাণিতিকভাবে আলোচনা করো। ৪

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বল কোনো না কোনো ভাবে এ সকল বলের প্রকাশ তাদের মৌলিক বল বলে।

খ গ্যাস বলতে এমন পদার্থ বোঝায় যার স্বাভাবিক অবস্থা বাষ্পীয়। যেমন– হাইড্রোজেন, অক্সিজেন। আর স্বাভাবিকভাবে বাষ্প বলতে কোনো কঠিন বা তরল পদার্থকে তাপ দিলে যে অবস্থা পাওয়া যায় তাকে বোঝায়।
একই তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে সকল গ্যাসের প্রসারণ একই হয়। বাষ্পের ক্ষেত্রে এমন দেখা যায় না। কোনো গ্যাসীয় পদার্থের তাপমাত্রা এর ক্রান্তি তাপমাত্রা অপেক্ষা কম হলে তাকে বাষ্প বলে। কোনো পদার্থ এর ক্রান্তি তাপমাত্রা অপেক্ষা অধিক তাপমাত্রায় থাকলে তাকে গ্যাস বলে। সাধারণ তাপমাত্রায় গ্যাসকে চাপ প্রয়োগে তরলে পরিণত করা যায় না, বাষ্পকে যায়।

গ দেওয়া আছে,
রেজার স্কুলের দিকে রেজার সরণ, $\vec{r_1} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$m
রফিকের স্কুলের দিকে রফিকের সরণ, $\vec{r_2} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$m
বের করতে হবে, স্কুলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $|\Delta\vec{r}| = ?$
এখানে,

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r_2} - \vec{r_1}\\ &= (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})\\ &= \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}\\ &= (-\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\Delta\vec{r}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (1)^2}\\ &= \sqrt{1 + 16 + 1}\\ &= \sqrt{18}\\ &= 3\sqrt{3}\\ &= 4.242\text{m } \textbf{(Ans.)}\end{aligned}$$

ঘ দেওয়া আছে,
রেজার স্কুলের দিকে রেজার সরণ, $\vec{r_1} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$m
রফিকের স্কুলের দিকে রফিকের সরণ, $\vec{r_2} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$m

সুতরাং, $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 2 - 4 + 12 = 10$
আবার, $r_1 = |\vec{r_1}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}$
এবং $r_2 = |\vec{r_2}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$
তাহলে, রফিকের স্কুলের দিকে রেজার সরণের মান অর্থাৎ $\vec{r_2}$ এর দিকে $\vec{r_1}$ এর অংশক, $r_1\cos\theta = \frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{r_2} = \frac{10}{\sqrt{21}} = 2.18$ m
আবার, রেজার স্কুলের দিকে রফিকের সরণের মান অর্থাৎ $\vec{r_1}$ এর দিকে $\vec{r_2}$ এর অংশক।

$$r_2\cos\theta = \frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{r_1} = \frac{10}{\sqrt{17}} = 2.43\text{m}$$

অতএব, গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখা যাচ্ছে রফিকের স্কুলের দিকে রেজার সরণের মানের চেয়ে রেজার স্কুলের দিকে রফিকের সরণের মান বেশি।

প্রশ্ন ▶ ১৫ একটি ভেক্টর, $\vec{A} = 2xy\hat{i} + (x^2 + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$. ◀ *শিখনফল: ৯*

ক. একক ভেক্টর কী? ১
খ. কেন্দ্রমুখী বল বলতে কী বোঝ? ২
গ. $\vec{A}$ ভেক্টরটিকে কিভাবে স্কেলার রাশিতে রূপান্তর করা যায় এবং এর মান কত হবে? ৩
ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। ৪

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে।

খ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে ঐ পথের কেন্দ্রে বস্তুটিকে গতিশীল রাখার জন্য ক্রিয়ারত নিট বলকে কেন্দ্রমুখী বল বলে। বস্তুর বেগ = v, ভর = m, বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ = r হলে কেন্দ্রমুখী বল, $F_c = \frac{mv^2}{r}$

গ দেওয়া আছে,
$\vec{A} = 2xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$
কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার রাশি। সুতরাং $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করে ভেক্টরটিকে স্কেলার রাশিতে রূপান্তর করা যাবে। যা কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের উৎস বা লক্ষ্য স্থানের মান নির্দেশ করে।
অর্থাৎ, $\vec{A}$ এর মান-

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \{2xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}\}$$

বা, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2yz)$

বা, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 2y + 2y + 2y$

বা, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 6y$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক হতে,

$\vec{A} = 2xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j} + (2yz)\hat{k}$

$\vec{A}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হবে যদি ভেক্টর ক্ষেত্রটির কার্ল অশূন্য হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$ হয়।

আমরা জানি,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \{2xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}\}$$

$$\text{বা, } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + y^2 & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right]$$

$$= \hat{i}(2z - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(2x - 2x)$$

$$= 2z\hat{i}$$

$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$

অর্থাৎ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶১৬ রাফি রোজ সাইকেলে করে কলেজে যায়। সাইকেল চালায় আর ভাবে, সাইকেলের প্যাডেলে সোজা খাড়া নিচের দিকে বল প্রয়োগ করি অথচ সাইকেল সামনের দিকে এগিয়ে যায়।

রাফির বন্ধু আল আমিন বিষয়টা সহজ করে দেয়। সে বলে এটি বলের বিভাজন দ্বারাই সম্ভব। নিচের দিকে এ বল দুটি উপাংশে বিভক্ত হয়ে ক্রিয়া করে। এদের একটি উপাংশ বল সাইকেলকে সামনের দিকে গতিশীল করে। ◀ *শিখনফল: ৭*

ক. একক ভেক্টর কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর হতে কীভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায়? ২

গ. F মানের একটি বলকে দুটি অংশে বিশ্লেষণ করলে, একটি অংশ যদি বলটির সমমানের হয় এবং এর সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে তবে অপর অংশটির মান ও দিক নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের বল F- কে যেকোনো দুই দিকে বিভাজিত করে বিশ্লিষ্টাংশদ্বয়ের রাশি দুটি তুলনা কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক নির্দিষ্ট দিক বরাবর ক্রিয়ারত যে ভেক্টরের মান এক, তাকে ঐ দিক বরাবর একক ভেক্টর বলে।

খ অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হলে বেগ, $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

এবং ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

সুতরাং অবস্থান ভেক্টরকে সময়ের সাপেক্ষে একবার ব্যবকলন করলে বেগ পাওয়া যায় এবং দুইবার ব্যবকলন করলে ত্বরণ পাওয়া যায়।

গ আমরা জানি,

$$P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\therefore F = \frac{F\sin\beta}{\sin(90 + \beta)}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta = 1 = \tan 45°$$

$$\therefore \beta = 45°$$

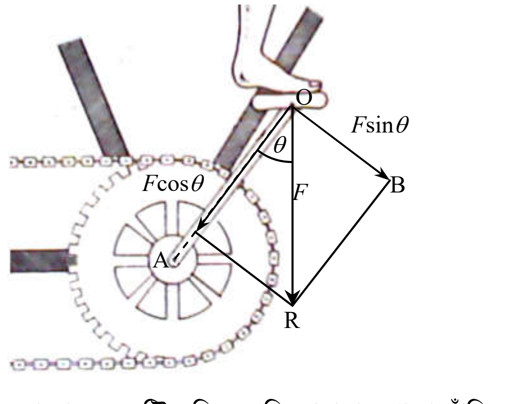
এখানে, $R = F$
$P = F$
এবং $\alpha = 90°$
$\beta = ?$
এবং $Q = ?$

এবং

$$Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F\sin 90°}{\sin(90° + 45°)} = \frac{F}{\cos 45°} = \frac{F}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,F$$

(Ans.)

ঘ রাফি যখন পাদানির O বিন্দুতে F বল খাড়া নিচের দিকে প্রয়োগ করে তখন এটি দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি উপাংশ ক্র্যাংকশ্যাফট OA বরাবর $F\cos\theta$ এবং অপরটি এর সাথে লম্ব OB বরাবর $F\sin\theta$। উপাংশ দুটির কোনটি বড় হবে এবং কোনটি ছোট হবে তা নির্ভর করে θ এর উপর। ক্র্যাংকশ্যাফট উল্লম্ব হলে $\theta = 0°$ হবে সেক্ষেত্রে $F\cos\theta$ এর মান সর্বোচ্চ F এবং $F\sin\theta$ এর মান সর্বনিম্ন শূন্য হবে। পাদানির অবস্থান যত নিচের দিকে হবে θ তত বৃদ্ধি পেতে থাকবে। ফলে $F\cos\theta$ এর মান কমতে থাকবে এবং $F\sin\theta$ এর মান বাড়তে থাকবে। ক্র্যাংকশ্যাফট অনুভূমিক হলে $\theta = 90°$ হবে, সেক্ষেত্রে $F\cos\theta$ এর মান সর্বনিম্ন শূন্য এবং $F\sin\theta$ এর মান সর্বোচ্চ F হবে। এরপর θ আরো বৃদ্ধি পেতে থাকলে $F\cos\theta$ এর মান বাড়তে থাকবে এবং $F\sin\theta$ এর মান কমতে থাকবে।



প্রশ্ন ▶১৭ কোনো এক বৃষ্টির দিনে প্রমি জানালার পাশে দাঁড়িয়ে বৃষ্টি দেখছিল (উল্লম্বভাবে বৃষ্টির বেগ 6 kmh^{-1})। প্রমি লক্ষ করল, রাস্তায় যে লোকটি হেঁটে চলছে (বেগ 4 kmh^{-1}) এবং যে লোকটি সাইকেলে চলছে (বেগ 8 kmh^{-1}) তাঁদের উভয়ের ছাতা উল্লম্বের সাথে ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা। ◀ *শিখনফল: ৫ ও ৬*

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি ব্যাখ্যা কর। ২

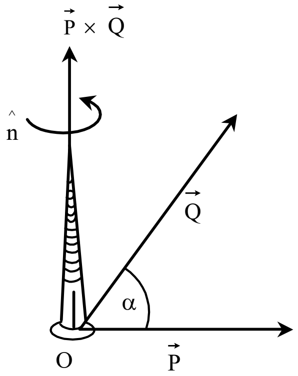
গ. হেঁটে চলন্ত লোকের ছাতা কত কোণে ধরলে সে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে? ৩

ঘ. হেঁটে চলন্ত লোক ও সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়— গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রমির পর্যবেক্ষণটির সত্যতা নিরূপণ কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডানহাতি আয়ত স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ



চিত্র : ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম

ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম: $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত সে সমতলের অভিলম্ব বরাবর একটি ডানহাতি স্ক্রু রেখে প্রথম ভেক্টরের দিক থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকই হবে গুণফলের দিক। অর্থাৎ, একক ভেক্টর $\hat{n}$ এর অভিমুখ।

উদাহরণ : $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমতলে O বিন্দুতে স্ক্রু রেখে $\vec{P}$ ভেক্টর এর দিক থেকে $\vec{Q}$ ভেক্টরের দিকে ঘুরালে স্ক্রুটি খাড়া উপরের দিকে অগ্রসর হয়। কাজেই $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর দিক সমতলের ঊর্ধ্বমুখী।

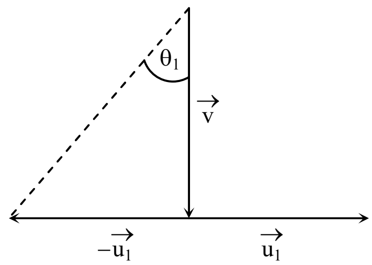
গ দেওয়া আছে, হেঁটে চলা ব্যক্তিটির হাঁটার গতিবেগ,

$\vec{u}_1 = 4kmh^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $v = 6kmh^{-1}$

হেঁটে চলার কারণে ঐ ব্যক্তির পরিপার্শ্বের বস্তুসমূহের মধ্যে বিপরীত দিকে $4kmh^{-1}$ গতিবেগ লক্ষ্য করবে। বৃষ্টির ফোঁটার মধ্যেও পিছনের দিকে $4kmh^{-1}$ বেগ লক্ষ্য করবে। তবে বৃষ্টির ফোঁটার নিজস্ব গতিবেগ থাকায়– $\vec{u_1}$ এবং $\vec{v}$ এর লব্ধিই হবে ঐ লোকটির দ্বারা পর্যবেক্ষণ করা বৃষ্টির আপাত গতিবেগ।

এই লব্ধি গতিবেগ উল্লম্বের সাথে θ_1 কোন উৎপন্ন করলে,



$$\tan\theta_1 = \frac{|-\vec{u_1}|}{|\vec{v_0}|} = \frac{4kmh^{-1}}{6kmh^{-1}} = 0.67$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1} 0.67 = 33.8°$$

সুতরাং হেঁটে চলন্ত লোকের ছাতা উল্লম্বের সাথে $33.8°$ কোণে ধরলে সে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে।

ঘ এখানে, সাইকেলে চলা লোকটির গতিবেগ, $\vec{u_2} = 8kmh^{-1}$ 'গ' অংশে বর্ণিত কারণে, বৃষ্টির ফোঁটার মধ্যে সাইকেলে চড়া ব্যক্তি যে আপাত গতিবেগ লক্ষ্য করবেন তা প্রকৃতপক্ষে $-\vec{u_2}$ এবং $\vec{v}$ এর লব্ধির সমান।

সাইকেলে চড়া ব্যক্তির ক্ষেত্রে এই আপাত গতিবেগ উল্লম্বের সাথে θ_2 কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta_2 = \frac{|-\vec{u_2}|}{|\vec{v}|} = \frac{8kmh^{-1}}{6kmh^{-1}} = 1.33$$

$$\therefore \theta_2 = \tan^{-1} 1.33 = 53.06°$$

সুতরাং সাইকেলে চড়া ব্যক্তিটি উল্লম্বের সাথে $53.06°$ কোণে ছাতা ধরলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে।

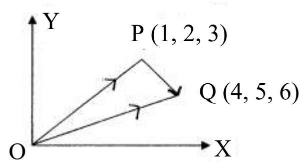
যেহেতু $33.8° \neq 53.06°$

এতএব, হেঁটে চলন্ত লোক ও সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়।

প্রশ্নব্যাংক

➤ উত্তর সংকেতসহ প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶১৮



◀ *শিখনফল: ৫ ও ৬*

ক. সদৃশ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. টর্ক কেন ভেক্টর রাশি ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকে $\overrightarrow{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ত্রিভূজ OPQ এর ক্ষেত্রফল নিরূপণ করা যাবে কিনা তা গাণিতিকভাবে দেখাও। ৪

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একই দিকে ক্রিয়াশীল দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

খ টর্ক = বল $\times$ ঘূর্ণন অক্ষ হতে বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব।
এখানে বল একটি ভেক্টর রাশি আর দূরত্ব স্কেলার রাশি। আমরা জানি, একটি ভেক্টর রাশি ও একটি স্কেলার রাশির গুণফল সর্বদা

একটি ভেক্টর রাশি হয়। কোনো বস্তুর উপর টর্ক প্রযুক্ত হয়ে বস্তুটিতে ঘূর্ণন সৃষ্টি করে। বস্তুর ঘূর্ণনের দিক নির্ধারন করে প্রযুক্ত টর্ক। অর্থাৎ টর্ক একটি ভেক্টর রাশি।

সুপার টিপস্ : প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্নের উত্তরের জন্যে অনুরূপ যে প্রশ্নের উত্তরটি জানা থাকতে হবে—

গ দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় মূলবিন্দু (0,0) এর সাপেক্ষে A ও B দুটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে (2, 4, 6) এবং (3, 5, 7)। $\overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

ঘ ΔOAB এর ক্ষেত্রফল বের করা যাবে কিনা, গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো।

প্রশ্ন ▶১৯ নুহাশদের বাড়ির সামনে 1km প্রশস্ত একটি নদীর ঠিক অপর পাড়ে তার কলেজ। একদিন সে ক্লাস শুরু হওয়ার ঠিক 6 মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে 12 kmh^{-1} বেগে একটি নৌকায় নদীটি পার হয়ে কলেজে পৌছল।

◀ *শিখনফল: ৬*

ক. কার্ল কী? ১
খ. "স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে এবং ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়"– ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকের বর্ণনানুযায়ী স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. নুহাশ যথাসময়ে ক্লাস ধরতে পারবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত কোনো বিন্দুর চারপাশে একটি রেখা সমাকলনের মান একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তাকে উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল বলে।

খ স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে ও ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে পরিণত করা যায়। স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্ট করলে, তা ভেক্টর ক্ষেত্রে পরিণত হয়, আর ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স করলে তা স্কেলার ক্ষেত্র হয়।

সুপার টিপস্ : প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্নের উত্তরের জন্যে অনুরূপ যে প্রশ্নের উত্তরটি জানা থাকতে হবে—

গ অনন্ত 1 km প্রশস্ত নদীতে 6 kmh^{-1} বেগে স্রোতের বেগের সাথে 110° কোণে নৌকা চালিয়ে সোজাসুজি নদী পার হলে স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

ঘ অপর পারেই রেল স্টেশন। 6 মিনিট পর ট্রেন ছেড়ে গেলে অনন্ত ট্রেনটি ধরতে পারবে কি-না।

প্রশ্ন ▶২০ রনি ও রাশেদ একটি বাক্সের হাতলের ওপর বল প্রয়োগ করে বাক্সটি সরাতে চাইছে। বলদ্বয়ের মান যথাক্রমে 20N ও 30N। বলদ্বয় ক্রিয়াবিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়া করে।

◀ *শিখনফল: ৪*

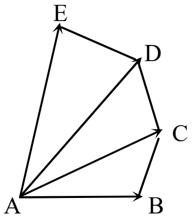
ক. প্রসঙ্গ কাঠামো কাকে বলে? ১
খ. ভেক্টর যোগের বহুভূজ সূত্র ব্যাখ্যা কর। ২
গ. রনি ও রাশেদ কর্তৃক প্রযুক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি নির্ণয় করো। ৩
ঘ. লব্ধি বলটি প্রযুক্ত বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা বড় অথবা বিয়োগফল অপেক্ষা ছোট হওয়া সম্ভব কিনা বিশ্লেষণ করো। ৪

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার সাহায্যে বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

খ দুই-এর অধিক ভেক্টরের ক্ষেত্রে, প্রথম ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুতে দ্বিতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুতে তৃতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু, এভাবে রেখে ভেক্টরগুলোকে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করে যে বহুভুজ তৈরি হয় তার শেষ বাহু বিপরীতক্রমে ভেক্টরগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, ABCDE একটি পঞ্চভূজ এর চারটি বাহু AB, BC, CD এবং DE একইক্রমে চারটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে। সূত্র অনুসারে, AE বাহু ভেক্টরগুলোর লব্ধি নির্দেশ করে।



AC, AD যোগ করে, বৃত্তের বিভিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

সুপার টিপস্ : প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্নের উত্তরের জন্যে অনুরূপ যে প্রশ্নের উত্তরটি জানা থাকতে হবে—

গ কোনো এক বিন্দুতে একই সময় 20N এবং 30N মানের দুইটি ভেক্টর 120° কোণে ক্রিয়া করলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির মান নির্ণয় করো।

ঘ দেখাও যে, কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 20N ও 30N মানের দুইটি ভেক্টর রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে রাশি দুইটির যোগফল ও বিয়োগফলের সমান।

প্রশ্ন ▶২১ জার্মানীর একটি পারমাণবিক শক্তি গবেষণাকেন্দ্রে ইলেকট্রনের গতিশক্তি নির্ণয়ের সময়ে ইউরেনিয়াম পরমাণুর কক্ষপথে ঘূর্ণায়মান ইলেকট্রনের যে কোনো মুহূর্তের অবস্থান নির্দেশ করা হয়েছিল—

$\vec{r} = \hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t$ ভেক্টর দ্বারা, এখানে ω একটি ধ্রুবক।

◀ *শিখনফল: ৫*

ক. চলক কী? ১
খ. দুটি ভেক্টরের লব্ধি কখন সর্বোচ্চ হয়? ২
গ. ইলেকট্রনটির তাৎক্ষণিক ত্বরণ কত? ৩
ঘ. ইলেকট্রনটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v}$ হলে $\vec{r} \times \vec{v}$ কি ধ্রুবক হবে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক গণিত ও বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এমন কিছু রাশি আছে যেগুলোর মান পরিবর্তিত হয় এরূপ রাশিকে চলক বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান, $R = \sqrt{A^2 B^2 AB\cos\alpha}$

R সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos\alpha = 1$ বা $\alpha = 0°$ হয়। সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি সর্বোচ্চ হয়।

সুপার টিপস্ : প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্নের উত্তরের জন্যে অনুরূপ যে প্রশ্নের উত্তরটি জানা থাকতে হবে—

গ একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 5\cos\omega t\hat{i} + 3\sin\omega t\ \hat{j}$; বিন্দুটির তাৎক্ষণিক ত্বরণ নির্ণয় করো।

ঘ একটি ইলেকট্রনের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\cos\omega t\hat{i} + 5\sin\omega t\hat{j}$ যেখানে ω ধ্রুবক। ইলেকট্রনের তাৎক্ষণিক বেগ ও অবস্থান ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের মান ধ্রুবক কিনা নির্ণয় করো।

প্রশ্ন ▶২২ দুটি ভেক্টর নিম্নরূপ —

$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

এবং, $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} - b_z\hat{k}$ ◀ শিখনফল: ৭

ক. অপারেটর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর বিয়োগের উপাংশ সূত্র ব্যাখ্যা কর। ২

গ. প্রমাণ কর যে $(\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2$ ৩

ঘ. $\vec{A} \times \vec{B}$ ও $\vec{B} \times \vec{A}$ ভেক্টরদ্বয় কী সমান? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি প্রদর্শন করো। ৪

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

খ **ভেক্টর বিয়োগের উপাংশ সূত্র:**

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটিকে বিভাজিত উপাংশে লেখা যায়, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{i} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এই ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগ বা বিয়োজন হবে,

$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$ .... (i)

এখন $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ হলে এবং X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{C}$ এর উপাংশ যথাক্রমে C_x, C_y ও C_z হলে, $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$

অর্থাৎ, $C_x = (A_x - B_x)$. $C_y = (A_y - B_y)$ এবং $C_z = (A_z - B_z)$

অতএব, লব্ধির মান,

$|\vec{C}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$

$= \sqrt{\{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2\}}$ .... (ii)

বি.দ্র. দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে দুটি উপাংশ যথা $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ সংশ্লিষ্ট রাশিগুলো থাকবে।

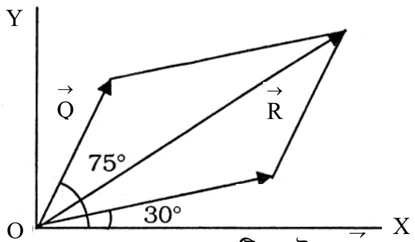
সুপার টিপস্ : প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্নের উত্তরের জন্যে অনুরূপ যে প্রশ্নের উত্তরটি জানা থাকতে হবে—

গ প্রমাণ করো যে, $(\vec{P}.\vec{Q})^2 + (|\vec{P} \times \vec{Q}|)^2 = P^2Q^2$

ঘ $\vec{P} = 5\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{Q} = \hat{k}$ হলে $\vec{P} \times \vec{Q}$ ও $\vec{Q} \times \vec{P}$ নির্ণয় কর।

➤ অনুশীলনের জন্য আরও প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶২৩



চিত্রে 10 একক ও 5 একক মানের দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও Q একই সঙ্গে একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। অনুভূমিকের সাথে এরা যথাক্রমে 30° ও 75° কোণ উৎপন্ন করে এবং এদের লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ । ◀ শিখনফল: ৫

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে। বুঝিয়ে দাও। ২

গ. $\vec{R}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ এর মান $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মানের যোগফলের চেয়ে বড় এবং বিয়োগফলের চেয়ে ছোট হতে পারে না; যুক্তি দাও। ৪

প্রশ্ন ▶২৪ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষের সাথে যথাক্রমে α_1, β_1, γ_1 কোণ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরটি যথাক্রমে α_2, β_2, γ_2 কোণ উৎপন্ন করে। ◀ শিখনফল: ৭

ক. সমরেখ ভেক্টর কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ বলতে কী বোঝায়? ২

গ. $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{B}$ কে $\vec{A}$ এর সমান্তরাল করতে হলে কী করতে হবে, α, β, γ এর সাহায্যে— বিশ্লেষণ কর। ৪

প্রশ্ন ▶২৫ নাহিন এবং জাহিন একটি ভারী স্থির ট্রাক-এ দু'টি রশি বেঁধে টেনে নিয়ে যাচ্ছিল। রশি দু'টির মধ্যে α কোণ সৃষ্টি হয়। ট্রাকটি নাহিনের দিকে সরে যাচ্ছিল। নাহিন জাহিনকে আরও বেশি বল প্রয়োগ করতে বলল। ◀ শিখনফল: ৫

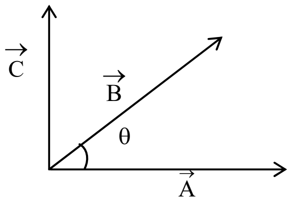
ক. কার্লের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. ত্রিভুজের তিনটি বাহু যদি একই ক্রমে তিনটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে তাহলে ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি শূন্য হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. দেখাও যে, জাহিন নাহিনের সমমানের বল প্রয়োগ করলে ট্রাকটি কারো দিকে না সরেই মাঝ বরাবর এগুবে বা এদের লব্ধিবল মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। ৩

ঘ. নাহিন এবং জাহিন ট্রাকটিকে কীভাবে টানলে সর্বাপেক্ষা কম বল প্রয়োগে ট্রাকটি টেনে নিতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর। ৪

প্রশ্ন ▶২৬ চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলের আছে, তলের উপর একটি ডানহাতি স্ক্রু লম্বভাবে আছে। ◀ *শিখনফল: ৪*



ক. ভেক্টর গুণন কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকে $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m এর মান কত হবে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুযায়ী, কিভাবে C = একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হয়? গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

প্রশ্ন ▶২৭ শিউলী একাদশ শ্রেণির একজন ছাত্রী। সে গ্রামে নিজ বাড়ি থেকে পায়ে হেঁটে এবং নৌকায় করে প্রতিদিন কলেজে যায়। বর্ষাকালে একদিন কলেজে যাওয়ার পথে সে $10 ms^{-1}$ বেগের বাতাস এবং $30\ ms^{-1}$ বেগে খাড়াভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। তারপরও সে হেঁটে নদীর ঘাটে পৌঁছে নৌকায় উঠল। নৌকার গতির প্রতিকূলে বাতাস প্রবাহিত হওয়ায় মাঝি তার সহকারীকে তীরে নেমে গুণ টানতে বললেন। তখন সহকারী গুণ টেনে অগ্রসর হতে লাগল। ফলে শিউলী যথাসময়ে কলেজে পৌঁছাতে পারল। ◀ *শিখনফল: ৪*

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র লেখ। ১

খ. ভেক্টর রাশির যোগ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায় না কেন? ২

গ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে হলে শিউলীকে উল্লম্বের সাথে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে? ৩

ঘ. তোমার মতে মাঝির সহকারী কীভাবে গুণ টানলে শিউলী তাড়াতাড়ি কলেজে পৌঁছাতে পারত? ব্যাখ্যা কর। ৪

প্রশ্ন ▶২৮ $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$ একটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে। ◀ *শিখনফল: ৯*

ক. অন্তরীকরণ কী? ১

খ. ঘূর্ণন বলের ব্যাখ্যা দাও। ২

গ. (2, 2, – 2) বিন্দুতে div $\vec{F}$ এর মান নির্ণয় করো। ৩

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে উদ্দীপকের বল ক্ষেত্রটির প্রকৃতি বিশ্লেষণ করো। ৪

প্রশ্ন ▶২৯ ভর, বেগ, ত্বরণ, সরণ, সময় ইত্যাদি ভৌত রাশিসমূহকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। যাদের কেবলমাত্র মান আছে তা হলো স্কেলার এবং যাদের মান ও দিক উভয়ই আছে তা হলো ভেক্টর। যেকোনো ভেক্টর রাশিকে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ উপাংশের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। ধরা যাক, একটি ভেক্টর রাশি নিম্নরূপ :

$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ ◀ *শিখনফল: ৫*

ক. একক ভেক্টর কী? ১

খ. $\vec{A}$ কোন সমতলে অবস্থিত ব্যাখ্যা করো। ২

গ. $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় করো। ৩

ঘ. গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, $\vec{A}$ এর দিকে প্রাপ্ত একক ভেক্টরের মান এক। ৪

প্রশ্ন ▶৩০ $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$। $\vec{B}$ ভেক্টরটি x ও y অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করে। ◀ *শিখনফল: ৬ ও ৭*

ক. সদৃশ ভেক্টর কী? ১

খ. $\vec{P} \times \vec{Q}$ ও $\vec{Q} \times \vec{P}$ পরস্পর বিপরীত দিক সম্পন্ন দুটো ভেক্টর-ডান হাতি স্ক্রু নিয়মের আলোকে ব্যাখ্যা করো।২

গ. $B_x = 2, B_y = 5$ ও $B_z = -2$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করো। ৩

ঘ. $B_x > B_y$ হলে, $\theta_1 < \theta_2$– গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে এর সত্যতা যাচাই করো। ৪